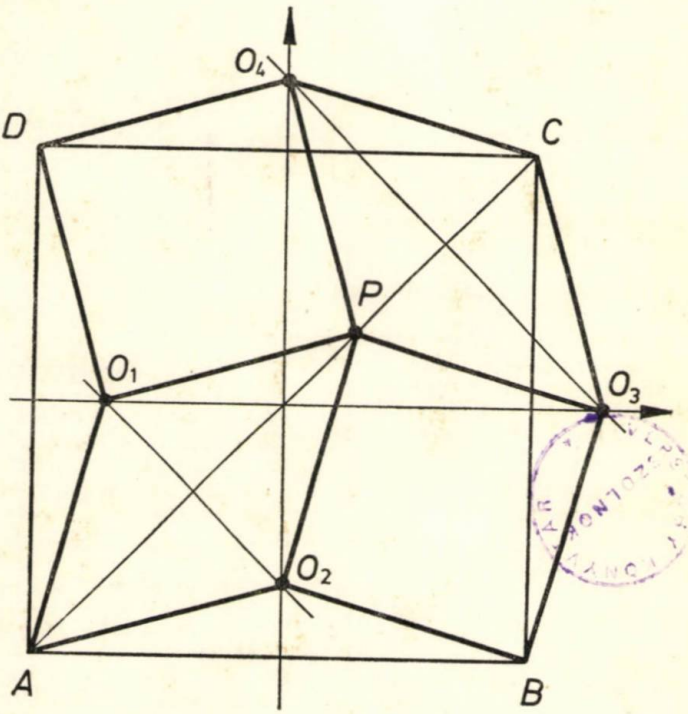
A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1987. XXXIV. évfolyam

1 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY FATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

88-1544 — Szegedi Nyomda
F. v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS

A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
a) személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését (nyugdíjasok törzsszámukat), *f)* munkahelyük címét—irányítószámmal.

TARTALOM

Almási Lászlóné: Számítógép az általános iskolákban 1
Dr. Ambrus András: Az új matematika-tantervek bevezetésének néhány kérdése Ausztriában 5
Bereznai Gyula: Az „$(a+b)(a-b)$"-től a másodfokú egyenletig 12
Menczer Gábor: A négyzetmentes számok egy tulajdonsága 15
Rátz László Vándorgyűlés Nagykanizsán 20
Szalontai Tibor: Higgyük? Hihetjük? 22
Újvári István: Emlékversenyek feladatairól 25
FELADATOK 26
KÖNYVISMERTETÉS
Dr. Szikszai József: A hatványközepek *(Láng Hugó)* 52
ÚJ KÖNYVEK I—II. ..... III.

СОДЕРЖАНИЕ

Алмаши Ласлоне: ЭВМ в общеобразовательной восьмилетней школе 1
д-р Амбруш Андраш: Некоторые вопросы программ по математуке в Австрии 5
Березнаи Дьюла: От $(a+b)$ $(a-b)$ до квадратного уравнения 12
Менцер Габор: Одно из свойств бесквадратных чисел 15
Передвижное собрание имены Ласло Ратца в г. Надьканижа 20
Салонтаи Тиҷор: Верить? Не верить? .. 22
Уйвари Иштван: О задачах памятных соревнований 25
ЗАДАЧИ 26
РЕЦЕНЗИЯ
д-р Сиксаи Йожеф: СерединЩ степеней *(Ланг Хуго)* 32
НОВЫЕ КНИГИ I—II. ..... III.

INHALT

Frau Almási (geb.:): Personalcomputer in den Grundschulen 1
Dr. Ambrus, András: Einige Fragen über die Einführung neuer Mathematik-Lehrpläne in Österreich 5
Bereznai, Gyula: Von „$(a+b)(a-b)$" bis zur quadratischen Gleichung 12
Menczer, Gábor: Über eine Eigenschaft der quadratfreien Zahlen 15
Wanderversammlung László Rátz in Nagykanizsa 20
Szalontai, Tibor: Sollen wir es glauben? Können wir es glauben? 22
Újvári, István: Über die Aufgaben von Erinnerungswettbewerben 25
AUFGABEN 26
BUCHBESPRECHUNG
Dr. Szikszai, József: Die Potenzmittel *(Láng, Hugó)* 32
NEUE BÜCHER I—II. ..... III.

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

1987. ÉVI XXXIV. ÉVFOLYAMÁNAK TARTALMA

Dr. S. O. Ale: Becslési képesség 1/2
Dr. Ambrus András: Matematikatanítási irányzatok Kárteszi professzor kommentárjaival I., II. 1/8, 2/37
Baboss Csaba: Kúpszeletek adott pontra illeszkedő érintőinek egyenletei 5/144
Dr. Bánfalvi József: Matematika Iskola Szegeden 6/163
Dr. Bárány Ottóné—Nagy Ferencné—Dr. Sümegi Lászlóné: Javasolt tanmenet matematikából az általános iskola 7. osztálya számára 3/65
Bencze Mihály: Egyenlőtlenségek a háromszögben 5/152
Dr. Berényi Zsuzsanna Ágnes: Beke Manó állásfoglalása három erkölcsi kérdésben 4/125
Dr. Berényi Zsuzsanna Ágnes: Magyarok szerepe a világ természettudományos és műszaki haladásában 1/31
Bíró Balázsné—Molnár Lászlóné—Salamon Éva—Tóth László: Javasolt tanmenet matematikából az általános iskola 8. osztálya számára 4/97
Csapó Lászlóné—Marcinkó István: A kísérleti matematika-tagozat megszervezése és a szakosított tanterv tanítási tapasztalatai 6/161
Dr. Drozdy Győzőné dr. Schwenner Katalin: A nem-euklideszi geometria elemei a középiskolában 1/12
Előd Istvánné: Mi jelent meg eddig az általános és középiskolai új matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok közül? 1/1
Fialáné Dér Zsuzsa—Lukács Ottó: Egyenlőtlenségek számítógépes megoldásának tanítása 5/147
Fitos László: Parabolába írt sokszögek területével kapcsolatos érdekességek 2/58
Dr. Gódor Győzőné Sergyán Stefánia: Logikai feladatokról 3/75
Dr. Hack Frigyes: A problémamegoldás számítógépes modellezése 4/105
Dr. Hajnal Imre: A gimnáziumok I. osztálya számára megjelenő új tankönyvről 5/136
ICME—6 ..... 4/126
Kamarás Lajos—Póla József; Beszámoló a tanárképző főiskolák hallgatóinak 1987. évi matematikai tanulmányi versenyéről 6/177
Dr. Kárteszi Ferenc: Egy Bolyai-féle véges hiperbolikus sík 1/21
Dr. Koska Árpád: Térbeli ívmetszés megoldása és programozása COMMODORE—64 típusú számítógépre 3/82
Kovács Péter: 1987 ..... 6/172
Második nemzetközi statisztikatanítási konferencia 1/III
Matematikai versenyek 1986 ..... 1/IV
Mihalovics Sándor: Ptolemaiosz tételéhez kapcsolódó megjegyzések 5/139
Dr. Molnár József: A matematikai gondolkodás fejlesztésének lehetőségei 5/132
Dr. Papp Sándor: Kipróbáltunk egy matematikai készségfejlesztő számítógép-programot ... 5/129
Percsi Olga: Differenciált oktatás, „differenciált értékelés" 2/33
Rábai Imre: Készítsünk egymásra épülő feladatokat! 4/111
Róka Sándor: Miért nem lehet? Feladatok szakkörre 4/113
Dr. Scharnitzky Viktor: Beszámoló az 1986—87. tanévi Hajós György Matematikai Tanulmányi Versenyről 4/116
Schuster Gyula: Gondolatok az implikáció tanításáról 2/42
Dr. Simonovits Miklós: Tanterv-vázlatok a Számítástechnika c. tankönyvhöz 6/165
Skanderáné dr. Apor Mária: A térszemlélet fejlesztésének lehetőségei a középiskolában ... 2/46
Számítógép az iskolában c. pályázat 1/IV
Sztanó Tamásné: Van, de mégis hiánycikk a felvételi példatár 6/176
Török Turul: Matematika és számítástechnika. A 4. szám melléklete .....
Újvári István: Matematikai tömegversenyek tapasztalatai 2/55
FELADATOK 1/24, 2/60, 3/90, 4/118, 6/186
KÖNYVISMERTETÉS 4/117
ÚJ KÖNYVEK 3/IV, 4/128
Helyreigazítás 1/32, 2/45 3/IV

ALMÁSI LÁSZLÓNÉ
tanár
Nagykálló, 1. sz. Általános Iskola

Számítógép az általános iskolákban

Blandl Mátyás cikkében olvashattuk (1985. júl.): „A mikroelektronika napjainkban végbemenő fantasztikus fejlődése és térhódítása, a mikroszámítógépek hazai elterjedésének várható üteme megkívánja a mai középiskolától, hogy olyan fiatalokat bocsásson ki padjaiból, akik otthon és munkahelyükön egyaránt munkaeszközként képesek használni őket."

Az általános iskola többek között a középiskolai tanulmányokra is felkészít, ezért nagyon fontos, ha lehetőség van rá, a számítástechnikai oktatásra is készítsük elő a tanulókat.

1986. februárjában országszerte ellátták az iskolákat COMMODORE—16-os számítógépekkel. Igaz ezek száma nagyon kevés, de van nagyon sok olyan iskola, amely saját erőből is vásárolt gépeket. A mi iskolánkban jelenleg 11 gép van.

Minden tantárgyban lehetőség van arra, hogy a készen kapható programokat felhasználva a gyerekek gyakorlásként, vagy akár az új anyag feldolgozásakor is közel kerüljenek a géphez, és így megismerjék annak kezelését, az egyes programokat tudják futtatni és dolgozni tudjanak vele.

A matematikaórákon például a folyamatos ismétléseknél, amikor már elkészültek a tanulók a feladatokkal, ellenőrzésként szoktam használni a következő programot.

Pl. A felszínszámítás szerepelt folyamatos ismétlésként.
Az ellenőrző program a következő.

```
10 PRINT "  "
20 PRINT "TÉGLATEST FELSZÍNE"
30 PRINT
40 PRINT T "ELSŐ ÉL (CM):";
50 INPUT A
60 PRINT "MÁSODIK ÉL (CM):";
70 INPUT B
80 PRINT "A HARMADIK ÉL (CM):";
90 INPUT C
100 F=2*(A*B+B*C+A*C)
110 PRINT "A FELSZÍN"; F; "CM 2"
120 END
```

Ehhez hasonlóan bármelyik test felszínét, V-t, síkidomok kerületét, K-t, területét, T-t ki lehet számítani.

A négy alapművelet gyakorlására, ellenőrzésére készült az alábbi program.

```
10 PRINT "  "
20 PRINT "          NÉGY ALAPMŰVELET GYAKORLÁSA"
30 PRINT " ] ] ] ] ] 1. ÖSSZEADÁS"
```

```
 40 PRINT "  ] ] ] ] ] 2. KIVONÁS"
 50 PRINT "  ] ] ] ] ] 3. SZORZÁS"
 60 PRINT "  ] ] ] ] ] 4. OSZTÁS"
 70 INPUT "  ] ] ] ] ] MELYIK MŰVELETET GYAKOROLJUK"; X
 80 INPUT "  ] ] ] ] ] HÁNY JEGYŰ SZÁMOKKAL DOLGOZZUNK"; Y
 90 K=0:TI ="000000"
100 FOR I=1 TO 10
110 A=INT /RND/1/×10↑(Y)/
120 B=INT /RND/1/×10↑(Y)/
130 ON×GOTO 220, 250, 280, 310
140 INPUT D
150 IFD=C THEN K=K+1: PRINT "JÓ": GOTO 170
160 PRINT "NEM JÓ. A JÓ MEGOLDÁS;" C
170 NEXT I
180 PRINT "  "
190 PRINT "QQQQQQQ10 FELADATBÓL"; K; "JÓ MEGOLDÁS"
200 PRINT "MEGOLDÁSI IDŐ"; TI/60; "MÁSODPERC"
210 END
220 PRINT A; "+"; B; "=";
230 C=A+B
240 GOTO 140
250 PRINT A; "—"; B; "=";
260 C=A—B
270 GOTO 140
280 PRINT A; "×"; B "=";
290 C=A×B
300 GOTO 140
310 PRINT A; "/"; B; "=";
320 C=INT (A/B)
330 M=A—C×B
340 INPUT D
350 INPUT "A MARADÉK"; M
360 IFC<>D THEN GOTO 380
370 IFM=N THEN GOTO 390
380 PRINT "NEM JÓ. A HÁNYADOS"; C; "A MARADÉK"; M: GOTO 170
390 PRINT "JÓ": K=K+1
400 GOTO 170
```

Még egyszer hangsúlyozni szeretném, hogy ezeket a programokat csak ellenőrzésre használjuk. Motiváló hatása is van a programmal végzett ellenőrzésnek, ugyanis mindig az ellenőrizhet a géppel, aki elsőnek van kész a számításával.

A gyerekek nagyon szeretnek a géphez kerülni, ezért igyekeznek, és így gyorsul a feladatmegoldó képességük is.

A számítástechnikai fakultáció és a matematika-tagozatos osztályok programjai lehetőséget adnak egy kicsit „komolyabban" is foglalkozni a számítástechnikával az általános iskolában. Most néhány gondolatban erről szeretnék írni.

A szakosított tantervű matematikában 5. osztályban megismerkednek a tanulók számítástechnikából a következőkkel:

— A számológép lényege.
— A számítógépek fajtái és egységei.
— Információhordozók.
— Ismerkedés egy iskolai számítógéppel. Játékprogramok bemutatása, személyi számítógép egységei, billentyűzete, üzembehelyezése.
— Számok és legfontosabb billentyűzet a gépen BASIC program és futtatása (RETURN vagy NEW LINE, RUN) INPUT, LET, PRINT utasítások.
— Aritmetikai kifejezések kiszámítása, kiírása.

6. osztályban:

— A számítógép és a számolást megkönnyítő berendezések közötti kapcsolat és minőségi különbség.
— A számítógéppel segített problémamegoldás lépései.
— Parancs és utasítás. PRINT, LET, INPUT, RETURN, LIST parancsok, PRINT, LET, INPUT utasítások.
— Aritmetikai és karaktertípusú egyszerű változók és kifejezések.
— GOTO utasítás — feltétel nélküli vezérlés.
— FOR.. TO.. NEXT ciklusvezérlés, STEP utasítás.
— A feltétel utasítása: IF..THEN a ciklus.
— A ciklus fogalma.
;<;<=;>;<>=relációk
ABSX, INTX, FIX X standard függvények.
LOAD, SAVE utasítások, programrögzítés és beolvasás.

7. osztályban:

— Összetett utasítások a DATA, READ, — IF...THEN...ELSE utasítás.
— Ciklusutasítás. — GET vagy INKEY utasítás.
— STOP, END, — a program leállítása.
— Véletlenszám generálása: RND RANDOM
— SQR (X)., TAB (X), CUR (X, Y) függvények. P/ kiírása.
— Tömbök dimenzionálása.
— Kiválasztási és rendezési feladatok.

8. osztályban:

— Karakterek ASC II. belső kódjai. ASC, CHR utasítások.
— Szöveg típusú változók egyes részének kiválasztása: LEF, RIGHT, MID, STRING, LEN karakterlánc függvények.
— Karakteres grafika cursor állítással. Grafikus üzemmód.
— Egyszerű játékprogramok.
— REM utasítás, egy program dokumentálása.

Számítástechnikai fakultációra tananyagbeosztás-javaslat a 7. osztályban

1. A gépterem rendje, balesetvédelme. A számítógépek kialakulása, a számítógép felépítése. A számítástechnika alkalmazási területei.
2. A billentyűzet használata. Számok és műveletek. Műveletek sorrendje, műveleti jelek, tizedespont.
3. A PRINT, RETURN, vessző és pontosvessző használata.
4. A változók fogalma, típusai.
5. A program fogalma. Egyszerű program írása alapján a programozás főbb lépéseinek megismerése.
6. Elágazás nélküli programok készítése PRINT utasítással.
7. TAB formula bevezetése. A változók cseréje.
8. Elágazás nélküli programok készítése. INPUT utasítás bevezetése.
9. Elágazás nélküli programok készítése.
10. Néhány gyakorlati függvény bevezetése.
11., 12., 13. Programok írása. INT (X), SQR (X), RND (X) függvények segítségével.
14., 15., 16. Elágazás nélküli programok írása, gyakorlása.
17., 18., 19. Önálló programozás.

20., 21. Elágazás nélküli algoritmusok témájának lezárása, a tanulók munkájának értékelése.
22., 23. Elágazásos algoritmusok. A folyamatábra szerepe.
24., 25., 26. Az elágazásos algoritmus gyakorlása. Egy programban több elágazás.
27. Az elágazásos algoritmus gyakorlása. Rendezések.
28. A ciklus. A ciklus részei, működése.
29. Véges és végtelen ciklusok.
30. A tömb fogalma, egy-, két-, három- és többdimenziós tömbök értelmezése, modellezése.
31., 32., 33., 34. Gyakorlás. Tömbök.
35., 36., 37., 38. Gyakorlás. Hányszor fusson a program?
39., 40., 41., 42. Gyakorlás. A ciklus.
43., 44., 45., 46. Ciklusképző utasítás. FOR... TO... STEP utasítás.
47., 48., 49., 50. Gyakorlás a FOR... TO... és NEXT utasítás alapján.
51., 52., 53. Gyakorlás. Rendezés *n* elemre.
54., 55., 56. Összefoglalás, évi munka értékelése.

8. osztályban:

1. Ismétlés. Elágazás nélküli algoritmusok INPUT, PRINT változók.
2. Ismétlés. Elágazásos algoritmus.
3. IF THEN és GOTO kapcsolata, ciklus.
4. Ismétlés. Ciklusképző utasítás FOR... TO... STEP és NEXT.
5. Ismétlés: Tömbök.
6. READ, DATA, RESTORE utasítások bevezetése.
7. A READ, DATA, RESTORE gyakorlása.
8. A GET A$ és TI$ bevezetése.
9. Gyakorlás. GETA $ TI $.
10. Képernyőtörlés grafika. Színezések. Grafikus üzemmód.
11. Gyakorlás: Grafika.
12. Gyakorlás: Grafikus üzemmód.
13., 14. Pont, vonal rajzolása.
15., 16., 17. Görbék, sokszögek, feliratok a képernyőn.
18., 19. Zene. Hanggenerátorok használata.
20., 21., 22. Hanggenerátor és képernyő együttes használata.
23., 24., 25. Karakterfüzér, függvények használata.
26. Logikai műveletek. AND, OR, NOT bevezetése.
27. ON, ... GOTO Logikai áramkörök.
28., 29., 30. Logikai műveletek gyakorlása.
31., 32., 33. Logikai műveletek. Mit csinál a gép?
34., 35., 36. Vezérlőkódok. Táblaképek tervezése, nyomtatása.
37., 38., 39. Sornyomtató használata. Ha nem áll rendelkezésre sornyomtató, akkor gyakorlás az eddig tanultak alapján.
40., 41., 42. Gyakorlás az eddig tanultakból.
43., 44., 45. Kazettás egység. Programok kimentése és beolvasásának gyakorlása SAVE, LOAD, VERIFY használata.
46., 47., 48. Adattárolás kazettán. Rekord file (adatállomány), soros file.
49., 50. Adattárolás. Adatok rögzítése, visszaolvasása.
51., 52., 53. Önálló programozás. Gyakorlás.
54., 55., 56. Évi munka értékelése. Saját programok futtatása.

DR. AMBRUS ANDRÁS
egyetemi adjunktus
ELTE TTK Matematikai Szakmódszertani Csoport, Budapest

Az új matematika-tantervek bevezetésének néhány kérdése Ausztriában

Beszélgetés H. Bürger bécsi professzorral

H. Bürger a bécsi tudományegyetem matematikadidaktikai professzora 1987 májusában az ELTE TTK Matematikai Szakmódszertani Csoport vendége volt. Ez alkalommal készült vele az alábbi beszélgetés, amelyben főleg az új osztrák matematikai tantervek bevezetésének szükségességéről, főbb sajátosságairól beszélt, úgy is mint a tantervi bizottság egyik vezetője. Mondanivalója a 10—18 évesek matematikatanítására vonatkozik.

Miért volt szükség tantervi változtatásokra?

1850 óta lényegében véve a hagyományos matematikai fejezetek — aritmetika, algebra, függvények, analitikus geometria, differenciál- és integrálszámítás — különösebb változtatások nélkül szerepeltek a tantervekben Ausztriában. Sokféle változás alapján merültek föl a következő kérdések: Miért, milyen osztályban, milyen sorrendben kell egy anyagrészt tanítani? Milyen képességek fejlesztéséhez járulnak hozzá az egyes matematikai tartalmak?

Tudomásul kellett vennünk, hogy sok — a jelenlegi, hagyományos tantervben szereplő — anyagot egyáltalán nem használnak fel a tanulók későbbi szakmai munkájukban, egyéni életükben. A zsebszámológépek és személyi számítógépek megjelenése az iskolákban is jelentős változásokat eredményez a hagyományos matematikaoktatásban. Például jelentős mértékben háttérbe szorul az írásbeli műveletek szerepe, ezt a hosszadalmas, unalmas munkát a gépek gyorsabban, pontosabban tudják elvégezni. A számítógépeket az egyenletek megoldásakor és a differenciál-, integrálszámításkor is jól fel lehet használni.

A felnőttek döntő többsége — enyhén szólva is — nincs jó viszonyban a matematikával a sok-sok negatív iskolai hatás eredményeként. Sok felnőtt Ausztriában egy egyszerű százalékszámítási feladatot sem tud megoldani, holott ezekre az ismeretekre — szakmától függetlenül — minden embernek szüksége van a mindennapi életben: adó, kamatos kamat, értéktöbbletadó stb.

Mindezen problémákra reagálnunk kellett, ezért is vált szükségessé a tantervek megváltoztatása. Meg kell jegyeznem, hogy egy új tanterv realizálása igen fárasztó, bonyolult feladat: a tantervek bevezetésével együtt szükség van új tankönyvekre, amelyek a tanterv szellemét tükrözik, s végül is minden egyes tanterv annyit ér, amennyit a tanárok az iskolában, az osztályban megvalósítanak belőle. Az egész folyamat döntő láncszeme a pedagógus.

Alapelvünk volt az új tanterv bevezetésénél, hogy ne túl erős mértékben változtassuk meg a korábbi tartalmat, inkább arra törekedtünk, hogy megfelelő segítséget nyújtsunk a tanároknak abban, hogyan kell az egyes tartalmakat eredményesebben, sokoldalúbban, komplexebb módon feldolgoztatni. Tantervfejlesztési munkánk során előforduló néhány jellegzetes motiváló tényezőt kiemelnék: korábban a gyári munkások számára a végrehajtás, a mechanikus munkavégzés állt a középpontban, ma ezt a munkát automata gépsorok végzik. Viszont előtérbe került a gépek kiértékelése, ellenőrzése, sőt tervezése is.

Egyre fontosabbá válik az önálló teljesítmény. Az iskolának minderre fel kell készíteni a tanulókat, ezért is fontos, hogy a matematikatanítás ne csak tanulói reprodukálások együttese legyen, hanem önállóan is tudjanak a tanulók „kihozni" valamit. Szorosan idevágó probléma, hogy a munkanélküliség centrális problémája az, hogy sok munkás nem képes nehezebb szellemi munkát végezni. Az élet, a munka egyre bonyolultabbá, absztraktabbá válik. Mindez a matematikaoktatás lehetőségeit, felelősségét is növeli, egyre több matematikai ismeretre, képességre van szükség az élet számos területén.

A fentiek miatt is tartottuk fontosnak olyan képességek kifejlesztését, mint: szituációk, jelenségek, dolgok elemzése; ezek formális ábrázolása, interpretálása, továbbá az indoklások gyakoribb alkalmazása. A mindennapok embere számára is ajánlatos például a matematikai statisztikai ábrázolások ismerete, hiszen közismert, milyen manipulációkat lehet végezni a statisztikai adatokkal. Jó, ha az átlagpolgár is mögé tud nézni a dolgoknak, eljárásmódoknak.

Vezérelvünk: a tanulóknak meg kell tanulniok kritikusan gondolkodni. A pontosság érdekében az indoklásokat gyakran le is kell íratni. Régebben az egyes feladatok megoldása során a konkrét eredmény volt a fontos, fő cél, ennek meghatározásával véget is ért a feladat megoldása. Ma többször kérünk különböző, pótlólagos ún. diszkutáló kérdésekre is választ, indoklást. Gyakran szerepel olyan kérdés pl.: Milyen esetekben helyes az adott okoskodás? Miért alkalmazható a felhasznált stratégia stb.

Külön kiemelném a gyakorlati alkalmazások előtérbe kerülését. Itt nemcsak az egyes témakörökhöz szorosan kapcsolódó feladatokra gondolunk, hiszen ezen feladatoknál könnyen „kiszámítható, kitalálható", hogy milyen módszerrel lehet az adott feladatot megoldani. A környezetünkben, a munkánk során, az életben nem ilyen helyzettel találkozunk. Adott egy szituáció, egy probléma, nem tudjuk milyen matematikai elmélet „illik" hozzá, előfordulhat, hogy nem is kell matematika a probléma megoldásához. Az ilyen helyzetekre való felkészülés céljából is vezettük be az ún. projekt jellegű munkákat, amikor egy-egy tanulócsoport egy konkrét gyakorlati problémát dolgoz fel. (Városi közlekedés, takarékoskodás, kereskedelem stb.) Erről részletesebben szólok a későbbiekben.

Nézzünk meg ezek után néhány konkrét kérdést az új tantervvel kapcsolatban!

Melyek azok a problémák, kérdések, amik részletesebb bemutatást érdemelnek?

I.

Az első ilyen kérdés a *differenciálás*. A tömegoktatás egyik legneuralgikusabb pontja, a hagyományos oktatás úgy próbálta megoldani ezt a problémát, hogy a közepeshez mérte a tanítási nívót. Most megpróbálunk ezen hivatalosan is változtatni. Három tantárgyból — anyanyelv, matematika, idegen nyelv — az egyes osztályokban ún. teljesítménycsoportok szervezését írja elő a tanterv meghatározott témák feldolgozásakor. A tanulói teljesítmények alapján három különböző szintű csoport szervezése ajánlatos.

I. csoport: mélyebben és részletesebben dolgozza fel a tananyagot, lehetőség szerint önállóan. Több kiegészítő anyag is tartozik ide. Fő feladata a magasabb fokú iskolákra való felkészítés. (Különösen az ún. Hauptschuléban.)

II. csoport: Az alapvető gondolkodási módok, képességek, készségek kifejlesztése, rögzítése és alkalmazása áll a középpontban. E csoport egyes tanulóit képessé kell tenni a magasabb szintű iskolába való átlépésre is. (Hauptschule→ Gimnázium.)

III. csoport: Elemi gondolkodási mó-

dok, képességek és készségek elsajátítása egyszerűbb, elemi követelmények között a fő feladat. Lehetőséget kell biztosítani a II. csoportba való átlépésre.

A tanulók beosztását 8—12 hetes alapos megfigyelés alapján kell elvégezni. Az első osztályban (11 éves korosztály) két alkalommal kell a csoportbeosztást elvégezni, míg a felsőbb osztályokban már három alkalommal évenként. Ilyenkor átsorolás is lehetséges a teljesítmények változása alapján.

A fenti három tantárgyban a tanterv ún. segítő, „korrepetáló" foglalkozások tartását is javasolja, különösen a már említett 12 hetes megfigyelési időszakban. Az alsó tagozatból a „Hauptschule"-ba, illetve Gimnáziumba való átlépéssel, illetve a későbbi iskolaváltoztatásokkal járó nehézségek leküzdésére ajánlatos e foglalkozások tartása. A III. csoportba tartozó tanulók részére is szükséges a plusz segítség, hiszen gyakran hiányosan sajátítják el az órákon az anyagot. Azoknak a tanulóknak részvétele is ajánlatos a segítő foglalkozásokon, akik egy teljesítménycsoportból egy magasabb teljesítménycsoportba kerülnek át, vagy fennáll a „kiesés" veszélye. Egész tanévben lehetőséget kell biztosítani ilyen foglalkozásokra. Tanulónként évente 25 óra lehet kötelező.

Szeretnék egy konkrét példát bemutatni. Az oszthatósági szabályok közül a III. csoportba tartozó tanulók számára a Hauptschuléban elegendő a 2-vel, 3-mal, 5-tel, 10-zel és 100-zal való oszthatóság szabályának az ismerete. Az oszthatósági szabályok és az egyszerűbb oszthatósági tételek indoklása, logikai összefüggések kutatása a III. csoportban, sőt a II. csoportban is elmaradhat.

II

A következő fő jellemzője tantervünknek a *kapcsolatokban, vonatkozásokban, jelentésekben gazdag matematikaoktatás* elérése. A matematikatanításban nem szabad korlátozódni a matematikai ismeretek és képességek formális szempontjaira, hanem lehetőség szerint sokoldalúan, a tanulók meglévő ismereteihez, tapasztalataihoz, képzeteihez kapcsolódva kell kifejleszteni az egyes fogalmakat. A törtszámok példáján mutatjuk be, hogyan alakulhat ki egy kapcsolatlánc.

A törtszámokkal kapcsolatban kialakulhat egy az írásmódhoz szorosan kötődő formális képzet: két szám egy vonallal van elválasztva. Fontos, hogy kialakuljon a törtszámok olyan képzete is, hogy az egyszerűsítéssel, illetve bővítéssel egymásba alakítható törtek ugyanazt a törtszámot jelentik. A törtszámokhoz kapcsolódik a tizedestört alakban való felírásmód lehetősége is. Az új tanterv egyik célja annak kialakítása, hogy más képzetek is kapcsolódjanak, kifejlődjenek a törtekkel kapcsolatban. Például $\frac{1}{3}$ vagy $\frac{3}{4}$ esetén bizonyos objektumok (szakaszok, torták, téglalapok) megfelelő részére, de bizonyos tevékenységekre — harmadolás, negyedelés — is gondolhatunk. A törtszámok viszonyszámokat is kifejezhetnek. Valaki fizetése $\frac{3}{4}$-e egy másik ember fizetésének, ezt úgy is fölfoghatjuk, hogy a két fizetés aránya 3:4.

Relatív rész egy újabb jelentési lehetőség. Pl. a bécsi házaspárok $\frac{2}{5}$ része gyermektelen.

A törtszámokkal való műveletek tanításakor nem szabad a formális szabályokra korlátozódni. A törtek összeadását és kivonását geometriailag és a köznapi életből vett példák segítségével is szemléletessé tehetjük. A törttel való szorzás és osztás fogalmának kialakításakor is fontos a megfelelő jelentéstartalom kidolgozása. Pl. $\frac{1}{3}$-dal való szorzás az eredeti mennyiség $\frac{1}{3}$ részére való

csökkentését jelenti. Az osztásnál konkrét gyakorlati problémát is tűzhetünk ki: pl. 3 l tej hány $\frac{1}{4}$ literes pohár megtöltéséhez elegendő. Itt a szorzás műveletére természetesen építünk.

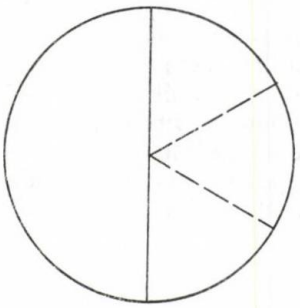
Az egyes konkrét műveleti szabályokat a különböző jelentésekből fokozatosan kell kialakítani, és a szabályokat újra és újra a jelentésekkel kell magyarázni. Megfelelő feladatsorozat elvezethet a kérdéses szabályhoz. Példa:

$$\frac{1}{2}:3=\frac{1}{2\cdot 3},\quad \frac{1}{2}:5=\frac{1}{2\cdot 5},$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{2}:4=\frac{1}{2\cdot 4},\quad \frac{1}{2}:n=\frac{1}{2\cdot n}.$$

A jelentésekhez való visszatérés jelentős segítség a tanulók számára, ha elfelejtettek egy-egy műveleti szabályt.

Megjegyzem, hogy a szabályok pontos ismeretét fontosnak tartjuk, ezek pontos ismeretének előnye a bonyolult feladatok megoldásakor jelentkezik, hiszen lehetővé teszi a komplexebb problémára való koncentrálást.

Egy jelentésekben, kapcsolatokban gazdag matematikaoktatás lehetővé teszi a fogalmak szélesebb körű felfogását, a matematikai ismeretek széles körű alkalmazását. Mindezzel az is lehetővé válik, hogy a tanulók a matematikát mint egy nem elszigetelt tudományterületet ismerik meg.



III.

Alkalmazásorientált matematikaoktatás

Egy összefüggésekben, kapcsolatokban, jelentésekben gazdag matematikaoktatásban törekedni kell arra, hogy a matematikai fogalmaknak matematikán kívüli vonatkozásai is legyenek. A matematikán kívüli területek egyrészt a matematikai ismeretek kialakításának, elsajátításának *kiindulópontjai,* másrészt az elsajátított matematikai ismeretek és képességek *alkalmazási területei* lehetnek. Az előbbire példa a fentiekben vázolt törtszámfogalom kialakítása, de olyan geometriai fogalmak mint egyenes, síkidom, téglalap, kocka, henger, kerület, terület, térfogat stb. kialakításánál is fontos szerepet játszanak a környezetünkben levő tárgyak formái, a tárgyakkal való manipulálások, cselekvések. A változó fogalmának kialakítására is a környezeti szituációk leírása adja a kiindulást, különösen vonatkozik ez a statisztikai fogalmakra.

Egy alkalmazásorientált matematikaoktatás fő célja természetesen az, hogy a tanulók matematikai ismereteiket a matematikán kívül is alkalmazni tudják a környezeti szituációk leírására, problémák megoldására. Az alkalmazásoknak két fő területe lehetséges: egy bizonyos matematikai tartalomhoz kapcsolódó alkalmazási feladatok (pl. szorzás, osztás tizedestörttel); másrészt olyan szituációk, amikor egy a gyakorlati életből vett alapprobléma adott és a tanulóknak kell a megfelelő matematikai módszereket — amelyeket persze ismernek már — kiválasztani. Törekedni kell arra is, hogy a tanulók önállóan tegyenek fel kérdéseket. Szöveges feladatokkal kapcsolatban lehetséges kérdés lehet: „Mit lehet itt meghatározni?"

Fontos, hogy a tanulók kritikusan kezeljék a matematika gyakorlati alkalmazásának problémáit. Idetartozik: az ered-

mények kritikus értékelése, van-e még gyakorlatilag értelme a kapott eredménynek, milyen feltételek mellett áll fenn a függvénykapcsolat stb.

Az alkalmazásorientált matematikaoktatásban különleges szerepe van az ún. projektorientált tanításnak, amelynek lényege, hogy tanulók egy-egy csoportja egy a gyakorlati életből vett problémát kap kidolgozásra, értékelésre. Konkrét példát említek: egy bécsi gimnázium I. osztálya a következő témát dolgozta föl: „Üdülés Magyarországon". Az osztály tanulóit kisebb csoportokra osztották. A következő kérdéseket, problémákat kellett megvizsgálniuk a tanulóknak: Mennyibe kerül az üdülés? A két ország árainak összehasonlítása, a pénznemek átváltási aránya, benzinárak, vonatköltség, autóbuszköltség, repülőjegyár, vízibusz-jegy ára. Milyen nevezetesebb városokat célszerű meglátogatni? Mennyi időt kíván ez? Mekkora a tervezett távolság? Takarékoskodási formák (kamatos kamatszámítás problémái), értéktöbbletadó stb. mind olyan kérdések, amelyek a probléma kidolgozásakor előfordulnak. Az adatgyűjtés során a tanulók utazási irodákban prospektusokat gyűjtenek, embereket kérdeznek meg tapasztalatakiról, esetleg külföldre is leveleznek. Az együttes munka révén megtanulják a közös munka szabályait, a közösségért érzett felelősséget, megtanulnak egymásra figyelni, egymást értékelni. Azt is megtanulják, hogy az adatgyűjtési munka sok esetben bizony nehézségeket is rejt magában.

Az adatok kiértékelése, dokumentálása zárja a projekt-munkát. Lehetőség szerint évente egy projekt-munkát kell szervezni osztályonként.

IV.

Általános matematikai képességek fejlesztése

A matematikatanítás fontos feladata a számolás, algebrai átalakításokra, illetve az elemi szerkesztésekre vonatkozó készségek kifejlesztése. Látnunk kell azonban, hogy unalmas, hosszú számolási eljárások, bonyolult algebrai kifejezések átalakítása sem a gyakorlati követelmények, sem a magasabb fokú iskolák szemszögéből nem szükségesek. A hosszadalmas írásbeli műveleteket elvégzi a zsebszámológép, sokkal fontosabb a fejszámolásban való jártasság, az ebben való biztonság kifejlesztése, az eredmények becslése, a lehetséges pontossági határok felismerése, az ún. számérzet kifejlesztése. Fontos elvünk: egy eljárás kidolgozása, tanítása csak akkor célszerű, ha azt a tanulók a problémamegoldás során önállóan alkalmazni tudják.

Minden iskolatípusban a matematikatanítás egyik legfontosabb feladata a tanulók produktív szellemi munkára vonatkozó képességének a kifejlesztése. Néhány ilyen terület:

— Számolások struktúrájának a felismerése.
— A problémák észrevétele a szituációkban.
— Adott egyenlethez szöveg konstruálása.
— Összefüggések, képletek megtalálása, felfedezése.
— Indoklási, argumentációs tevékenység fejlesztése.
— A matematikai módszerek tudatosítása.

A matematikai munkamódszerek, eljárások ésszerű bevezetésének feltétele megfontolásokat, reflexiókat, diszkussziókat is tartalmazó munka. A másik alapvető sajátosság a folyamatosság. Folyamatosan kell gyakoroltatni pl. az indoklási, argumentációs tevékenységet. Ennek egyik fontos előfeltétele az egzakt, pontos munka, a tényállások precíz ábrázolása, felvázolása és leírása. Fontos felhívni a tanulók figyelmét a tények matematikai szempontból való vá-

zolásának a szükségességére, mert a megfelelő formális, grafikus vagy verbális forma „tisztábbá" teheti a szituációt, segíthet a probléma megoldásában. A fordított irányú munka is fontos: matematikai kifejezések interpretálása.

Alapvető elvünk, hogy a matematikai tartalmakkal való foglalkozásokat mindenekelőtt egy jó eszköznek tekintjük az általános matematikai képességek – problémák elemzése, indoklások, ismert eljárás új szituációban való alkalmazása, absztrahálás, konkretizálás, általánosítás, specializálás, precíz munka, kritikus gondolkodás stb. — kifejlesztéséhez, amelyek végül is a produktív, ésszerű gondolkodási módokhoz vezetnek.

Az alábbiakban néhány konkrét példát mutatok be arra, hogy az indoklási tevékenység mennyire előtérbe került. Az algebrai kifejezések átalakítása mindig szabályok szerint történik. Sok tanulói nehézség forrásai e műveletek, ezért célszerű több esetben az átalakítási lépések jelölése mellett azok indoklását is felvázolni, megkövetelni.

Példa:

$$\left(\frac{a^2b}{c^3}\right)^5 = \qquad \left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n},$$

$$= \frac{(a^2b)^5}{(c^3)^5}. \qquad (A \cdot B)^n = A^nB^n,$$

Egyenletek megoldása

$$3x + 8 = 23, \qquad A + B = C,$$

$$3x = 23 - 8. \qquad A = C - B.$$

Tapasztalataink szerint a szabályok megjelölésével jobban rögződik az elvégezhető átalakítási lépés. Természetesen nem minden feladat megoldásánál kell megkövetelni a megfelelő szabály írásbeli rögzítését, az a fontos, hogy a tanuló képes legyen minden esetben a lépését indokolni, s ezt többször ellenőrizni kell. Ahhoz segít a fenti típusú munka, hogy tudatosan a tanulók vérévé válik az indoklás, s nem csak egy minta utáni mechanikus cselekvés lesz egy-egy átalakítás.

Az Ön kutatási területe az algebra tanítása. Milyen problémákat lát ezen a területen?

Három alapkérdést tartok fontosnak e területen: a *változó* fogalmának bevezetése, kialakítása; *kifejezések* átalakítása; *egyenletek* megoldása.

A hagyományos matematikaoktatásban a változókkal kapcsolatban a mechanikus, kalkulusszerű műveletek dominálnak. Összefüggések, képletek megsejtetése ritkán fordul elő; kifejezések interpretálása szinte egyáltalán nincs. Nem csoda, hogy a tanulók algebrai ismereteinek foka rendkívül alacsony. A sok-sok gyakorlás ellenére hiányosan sajátítják el a kalkulusokat. Mi lehet ennek az oka? Néhány lehetséges válasz:

Egyik fő okot abban látjuk, hogy ritkán fordulnak elő az algebratanítás során tartalmi interpretációk, tartalmi magyarázatok. Ezért a kalkulusok gyakoroltatása szinte öncélló válik. Tanulói interjúink alapján világossá vált, hogy a gyerekek többsége a kifejezések átalakításában, illetve az egyenletek megoldásában csak „önkényes játékszabályokat" látott. Sem konkrét számokkal végzett műveletekkel való kapcsolatokat, sem lehetséges tartalmi interpretációkat nem láttak bennük. Arra a kérdésre például, hogy miért teljesül az $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ azonosság, többen olyan választ adtak, hogy azért, mert a tanárunk így adta meg", vagy a „képletgyűjteményben így van". Néhányan felvetették, hogy miért nem az „egyszerűbb"

$(a+b)^2=a^2+b^2$ szabályt adjuk meg. Számok behelyettesítésével konstruált ellenpéldák nem befolyásolták őket, mert véleményük szerint az algebrának semmi köze sincs a számtanhoz. A területekkel való szemléltetést a legtöbb interjúalany nem ismerte. Néhányan azt mondták, hogy bár e formula a területet jól írja le, de szerintük mégis jobb lenne az $(a+b)^2=a^2+b^2$ formulát használni. Tartalmi interpretáció és formális számolás e tanulók fejében más-más rekeszben volt. Véleményünk szerint a tartalmi jelentések birtoklásának a hiánya a kalkulusok birtoklását is negatívan befolyásolja, mivel a formulák a „levegőben lógnak". E hiányosságok egyik fő oka, hogy az első iskolai években a számtan van egyoldalúan kihangsúlyozva. Kezdettől fogva szorosabb kapcsolatban kellene a számtant és az algebrát tanítani.

Problémának érzem azt is, hogy az algebrai átalakítások gyakorlásánál gyakran túl bonyolult, hosszadalmas feladatot adunk, azon elvből kiindulva, hogy a bonyolultat kell gyakoroltatni, ezáltal részlépésként az egyszerűbb átalakításokat is megköveteljük, s így birtokolni fogják azokat a tanulók. Világosan kell látnunk azonban, hogy a bonyolult kifejezések kezelése specifikus problémákat tartalmaz, s bár ezzel a bonyolultabb feladatok megoldásának a képessége fejlődik, de nem feltétlenül alakul ki az algebrai kalkulusok alapvető megértése. A legfőbb nehézség tapasztalataink szerint az, hogy a tanulóknak gyakran csak homályos elképzelésük van a kifejezések szerkezetéről, a megfelelő szabályokról. Sokszor nem is tudnak felidézni egy szabályt pontosan, holott a szabályok cselekvési utasítások, ha ezek pontatlanul, hiányosan rögződnek, a cselekvés, végrehajtás is bizonytalanná, pontatlanná válik.

Néhány javaslat:

Kulcskérdés a változó fogalmának a kialakítása. Az alábbi három példán szeretném bemutatni a változó fogalmának különböző aspektusait.

1. *Tárgyi aspektus.*

Nézzük a következő szöveges feladatot: Gondolj egy számot, adj hozzá 15-öt, vedd az így kapott szám háromszorosát, majd az eredményből vedd el az eredeti szám háromszorosát. Eredményül 45-öt kapsz. Miért jó minden elgondolt számra a 45?

Megoldás:

$$3(x+15)-3x = 3x+45-3x = 45.$$

Esetünkben az x változó az ismeretlen, közelebbről nem meghatározott számot jelöli, itt tehát a tárgyi vonatkozás a domináns.

2. *Helyettesítési aspektus.*

Feladat: Helyettesítsük a $3x+2=11$ egyenletben x helyébe az 1-től 6-ig terjedő természetes számokat. Milyen esetben kapunk igaz állítást?

$3\cdot 1+2 = 11$ hamis	$3\cdot 4+2 = 11$ hamis
$3\cdot 2+2 = 11$ hamis	$3\cdot 5+2 = 11$ hamis
$3\cdot 3+2 = 11$ igaz	$3\cdot 6+2 = 11$ hamis

Ez esetben a változó mint „üres tartály", „üres rekesz" szerepel, amelybe számokat lehet behelyezni, behelyettesíteni.

3. *Kalkulus szempont.*

Egyenletmegoldás mérlegelv segítségével. Itt a számolási, műveleti szempont van előtérben. A változók mint jelentés nélküli jelek szerepelnek, melyekkel bizonyos szabályok szerint műveleteket szabad végezni.

Az alsóbb osztályokban az első szempontnak kell dominálnia, de a későbbi osztályokban is vissza kell térni a tárgyi (jelentésbeli) vonatkozásokra.

Ausztriában néhány éve intenzíven előtérbe kerültek a matematikatanítással kapcsolatban az ún. „értelmességi" vizsgálatok, kutatások, ami azt jelenti, hogy vizsgáljuk egy-egy adott matematikai tartalom helyét, szerepét, jelentőségét a matematikatanítás folyamatának egészében. A változókkal kapcsolatban ez azt jelenti, hogy különböző példákon keresztül tudatosítani kell a tanulókban a változó használatának fontosságát, értelmét. Néhány jellemzőt kiemelnék:

a) A változók az általánosítás eszközei. Olyan szituációk, melyek több egyedi esetet foglalnak magukban, változók segítségével jól leírhatók általánosságban.

b) Különböző szituációk ugyanazon általános szempont szerinti leírása. Egy adott képlet pl. $y=ax$ sokféle szituáció matematikai modellje.

c) A változók hatékony eszközök a problémamegoldásokban.

d) Heurisztikus funkciók

1. A képzeleti tartomány túllépése.

Egy 4, illetve 5 egységhosszúságú oldalakkal rendelkező téglalap területe 20 területegység. Ezt szemléletesen indokolni tudják a tanulók az ismert módon. (A téglalap felosztása 20 egységnégyzetre.) A változó lehetővé teszi a kiterjesztést tetszőleges *a* és *b* oldalú téglalapra.

2. Adott problémaosztály minden egyes feladatának *egyszerre való* megoldása.

3. A változók használata *hipotetikus munkát* tesz lehetővé. Ezt főleg az indirekt bizonyításoknál használjuk. A változók segítségével olyan számokra vonatkozó összefüggéseket is le tudunk írni, amelyeket még nem ismerünk (szöveges feladatok megoldása egyenlettel) vagy esetleg nem is léteznek (indirekt bizonyítások). Ezen összefüggésekkel operálva eljuthatunk a keresett számhoz.

4. *Indoklások, bizonyítások* változók segítségével.

Példa: Bizonyítsuk be, hogy egy 0-tól különböző természetes szám négyzete 1-gyel nagyobb a szomszédos számok szorzatánál. $(n-1)\cdot(n+1)=n^2-1$.

5. Általános jellegű ismeretek átadása, kommunikálás változók segítségével.

Ezekre az ún. „értelmességi" kérdésekre természetesen más témák esetén is ki kell térni. A nemzetközi matematikadidaktikai irodalomban a „tanításra vonatkozó reflexió" terminussal fejezik ki a fenti fejtegetések lényegét. Természetesen az osztályban, a tanulókkal is ki kell térni ilyen jellegű kérdésekre.

BEREZNAI GYULA
ny. főiskolai tanár
Nyíregyháza

Az „$(a+b)(a-b)$"-től a másodfokú egyenletig

Egy jól ismert azonosság további alkalmazásai

Ez a cím Dr. Surányi János professzor egy korábbi írására emlékeztetheti lapunk olvasóit (A Matematika Tanítása 1980. 1. sz.), amelyben a szerző nemcsak az elementarizációs matematikai irányzat (A Matematika Tanítása 1987. 1. sz., 11. old.) szimpatizánsainak adott ötleteket, de mindazoknak is, akik a matematikai

ismeretek összefüggéseire, egységességére akarnak tanítványaiknak egyszerű példákat mutatni. Mi ehhez a törekvéshez szándékszunk hozzájárulni az alábbiak közreadásával:

A jól ismert

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

azonosságból

$$a=x+y;\quad b=x-y$$

helyettesítéssel adódik, de közvetlenül a műveletek elvégzésével is igazolható a következő egyenlőség:

$$(1)\qquad (x+y)^2-(x-y)^2=4xy.$$

Ez az azonosság jó szolgálatot tehet bizonyos típusú egyenletrendszerek megoldásánál és a másodfokú egyenlet megoldóképletének a tankönyvekben található módszerektől eltérő módon való levezetésére.

1. A kétismeretlenes egyenletrendszerek jelentős része

$$(2)\qquad \left.\begin{aligned} ax+by&=c\\ xy&=d\end{aligned}\right\}$$

alakú vagy ilyen alakra hozható. Megoldása céljából a második egyenletet ab-vel szorozzuk, ami által az egyenletrendszert

$$\left.\begin{aligned} ax+by&=c\\ ax\cdot by&=abd\end{aligned}\right\}$$

alakban adhatjuk meg. Ebből pedig meghatározhatjuk $(ax-by)$-t. (1) szerint

$$(ax-by)^2=(ax+by)^2-4axby=c^2-4abd,$$

amiből

$$ax-by=\pm\sqrt{c^2-4abd}.$$

Ebből és (2) első egyenletéből kapjuk összeadással, hogy

$$x_{1,2}=\frac{c\pm\sqrt{c^2-4abd}}{2a}$$

Az (1) azonossággal könnyen igazolható a két pozitív szám számtani és mértani közepe közötti jól ismert egyenlőtlenség:

$$(3)\qquad (x+y)^2=(x-y)^2+4xy\geqq 4xy,$$

hiszen $(x-y)^2$ nem negatív. Itt egyenlőség akkor áll fenn, ha $(x-y)^2=0$, vagyis amikor $x=y$. (3)-ból pedig az következik, hogy

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\geqq xy$$

vagyis, hogy

$$\frac{x+y}{2}\geqq\sqrt{xy}\,.$$

Ha két szám összege és szorzata adott, az eljárás feleslegessé teszi a másodfokú egyenletté való alakítást is.

2. Tekintsük az

$$x^2+px+q=0$$

másodfokú egyenletet, és írjuk azt ilyen alakban:

$$(*) \qquad x(x+p)=-q,$$

majd vezessük be az

$$x+p=y$$

helyettesítést, s írjuk ezt

$$x-y=-p$$

alakban. Ezáltal $(*)$ ilyen alakot vesz fel:

$$xy=-q.$$

Ilyen átalakítások után a következő egyenlőséghez jutunk:

$$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=(-p)^2+4(-q)=p^2-4q.$$

Innen azonnal adódik, hogy

$$x+y=\pm\sqrt{p^2-4q} \quad (p^2\geqq 4q),$$

s kapjuk az

$$\left.\begin{aligned} x+y&=\pm\sqrt{p^2-4q}\\ x-y&=-p \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert, amelynek megoldását a megfelelő oldalak összeadásával végezhetjük:

$$2x=-p\pm\sqrt{p^2-4q},$$

vagyis a gyökök:

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

Ha az egyenlet

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

alakú, akkor a-val való osztás és $p=\frac{b}{a}$; $q=\frac{c}{a}$ helyettesítéssel s némi átalakítással kapjuk a jól ismert

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

megoldóképletet.

Ha a másodfokú egyenlet gyökei x_1 és x_2, akkor (1) alatti azonosságunk segítségével közvetlenül megadhatjuk $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ és x_1-x_2 értékét is. Ugyanis a gyökök és együtthatók összefüggésének ismeretében írhatjuk, hogy

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-p}{q},$$

illetve

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=p^2-4q.$$

3. Kiindulási azonosságunk lehetővé teszi a maradéktétel valamint a gyökök és

együtthatók kapcsolatának vizsgálatát is a másodfokú polinom esetében: Ha a $P(x)$ polinomot osztjuk $x-h$-val, a hányados $Q(x)$, a maradék R, tehát

$$P(x) = (x-h)Q(x)+R.$$

Ez az $x=h$ helyen

$$P(h) = 0 \cdot Q(x)+R = R,$$

vagyis $(x-h)$-val való osztás után a maradék a polinom h helyen vett helyettesítési értéke. A másodfokú esetben:

$$R = h^2+ph+q.$$

A másodfokú polinomnak akkor és csak akkor zérushelye (gyöke) a h, ha ez a maradék zérus:

(4) $$R = h^2+ph+q = 0.$$

Kivonva ezt $x^2+px+q=0$-ból azt kapjuk, hogy

$$x^2-h^2+p(x-h) = (x-h)(x+h)+p(x-h) = (x-h)(x+h+p) =$$

$$= (x-h)[x-(-h-p)] = 0.$$

Látjuk tehát, hogy a $h=x_1$ gyök mellett $x_2=-h-p$ is gyök, és ebből azonnal adódik, hogy

$$x_1+x_2 = h+(-h-p) = -p,$$

a gyökök szorzata pedig, tekintettel (4)-re:

$$x_1x_2 = h(-h-p) = -h^2-ph = q.$$

Az itt bemutatott eljárások azért is figyelemreméltóak, mert gondolatmenetük magasabb fokú polinomok esetén is sikerrel alkalmazható.

MENCZER GÁBOR
főiskolai tanársegéd
Eötvös Loránd Tudományegyetem Általános Iskolai Tanárképző Főiskolai Kar,
Budapest

A négyzetmentes számok egy tulajdonsága

Ismeretes, hogy a 10-es számrendszerben minden természetes szám ötödik hatványa ugyanarra a számjegyre végződik, mint amire maga a természetes szám, mert $10|(a^5-a)$, mivel egyrészt Euler kongruenciatétele (lásd pl.: Lánczi Ivánné, Turán Pál: Számelmélet, Kézirat, Tankönyvkiadó, 1971. (J3—664), 56. oldal, T. 2. 16. tételt) miatt $5|(a^5-a)$, másrészt nyilván: $2|(a^5-a)$. Természetes módon vetődik fel a kérdés, hogy más, nem feltétlen 10-es, hanem q-as számrendszerben van-e olyan $n>1$ kitevő, hogy minden $0\leqq m\leqq q-1$-re $q|(m^n-m)$ teljesül? A felvetett kérdésre az alábbiakban adjuk meg válaszunkat:

1. Állítás: Ha q nem négyzetmentes szám, azaz q prímtényezős felbontásában (kanonikus alakjában) valamelyik prímtényezője legalább a második hatványon fordul elő (tehát $q=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\ldots p_k^{r_k}$ esetén van olyan $1\leqq i\leqq k$, hogy $r_i\geqq 2$), akkor nem igaz ami a 10-es számrendszerben, vagyis nem teljesül, hogy van olyan univerzális 1-nél nagyobb hatványkitevő, amelyre bármely q-as számrendszerbeli számot emelve, ugyanarra a számjegyre végződik, mint amire maga a szám.

Bizonyítás: Legyen $q=p_1^{r_1}\cdot p_2^{r_2}\dots p_k^{r_k}$ esetén $r_i\geqq 2$, valamilyen $1\leqq i\leqq k$-ra. Ekkor $q^*:=\frac{q}{p_i}=p_1^{r_1}\dots p_i^{r_i-1}\dots p_k^{r_k}$ még mindig osztható p_i-vel, valamint $q|q^{*2}=\left(\frac{q}{p_i}\right)^2=$ $=q\cdot\frac{q}{p_i^2}$, mivel $r_i\geqq 2$ miatt:

$$\frac{q}{p_i^2}\in\mathbf{N}^+(q^{*2}=p_1^{2r_1}p_2^{2r_2}\dots p_i^{2r_i-2}\dots p_k^{2r_k}=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\dots p_i^{r_i}p_k^{r_k}p_1^{r_1}\dots p_i^{r_i-2}\dots p_k^{r_k}).$$

Tehát $q|q^{*2}$, és ezért bármely $n\in\mathbf{N}^+$, $n\geqq 2$ esetén $q|q^{*n}$, ahol $q\nmid q^*$. Ez pedig az állításban mondottak igazát jelenti.

2. Állítás: Ha q négyzetmentes, azaz q prímtényezős felbontásában (kanonikus alakjában) minden prímszám pontosan az első hatványon fordul elő, akkor bármely $m\in\mathbf{N}^+$ esetén: $m^{\varphi(q)+1}\equiv m\pmod q$, azaz $q|(m^{\varphi(q)+1}-m)$, ahol φ az úgynevezett Euler-féle φ-függvényt jelöli. Tehát ekkor létezik olyan 1-nél nagyobb univerzális hatványkitevő, hogy minden természetes számnak ez a hatványa a q-as számrendszerben ugyanarra a számjegyre végződik, mint amire maga a szám.

Mielőtt az állítást bebizonyítanánk, két lemmát ismertetünk:

1. Lemma: Ha q négyzetmentes, akkor bármely $m\in\mathbf{N}^+$ esetén $\left(m,\frac{q}{(m,q)}\right)=1$, ahol (a,b) az a és a b számok l. n.k.o.-ját jelöli.

Bizonyítás: ha $(m,q)=1$, akkor: $\left(m,\frac{q}{(m,q)}\right)=(m,q)=1$, ha pedig $(m,q)\neq 1$, akkor q négyzetmentes volta, azaz $q=p_1p_2\dots p_k$ miatt $p_i|m$ valamilyen $i=1,2,\dots,k$ esetén, így: $p_i\nmid\frac{q}{(m,q)}$, ezért: $\left(m,\frac{q}{(m,q)}\right)=1$. Ezzel lemmánkat beláttuk.

Megjegyzés: ha q nem négyzetmentes, akkor az előbbi lemma állítása nem teljesül, ugyanis ha $q=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$ és van olyan $1\leqq i\leqq k$, hogy $r_i\geqq 2$, akkor $m=p_i$-re: $(p_i,q)=p_i$ és $\left(p_i,\frac{q}{(p_i,q)}\right)=\left(p_i,\frac{q}{p_i}\right)=p_i$, mivel $p_i^2|q$ miatt $p_i|\frac{q}{p_i}$.

Pl. $q=25$ és $m=5$ esetén: $(m,q)=5$ és $\left(m,\frac{q}{(m,q)}\right)=\left(5,\frac{25}{5}\right)=(5,5)=5$.

Az 1. lemma következménye:
Ha q négyzetmentes, akkor az Euler—Fermat tétel miatt bármely $m\in\mathbf{N}^+$ esetén:

$$m^{\varphi\left(\frac{q}{(m,q)}\right)}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,\frac{q}{(m,q)}\right)\qquad(*)$$

2. Lemma: Bármely k, $a\in\mathbf{N}^+$ esetén: $\varphi(a)|\varphi(ka)$.
(Mint köztudott, φ multiplikatív, de nem totálisan (teljesen) multiplikatív számelméleti függvény).

Bizonyítás: Ismeretes, hogy ha $a=p_1^{l_1}\cdots p_r^{l_r}$ $(l_1,l_2,\dots,l_r\geqq 1)$, akkor $\varphi(a)=$ $=a\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$, ezért ha $k=p_1^{i_1}\cdots p_r^{i_r}q_1^{j_1}\cdots q_s^{j_s}$

$(i_1, i_2, \ldots, i_r \geqq 0,\ j_1, j_2, \ldots, j_s \geqq 1)$, akkor:

$$\varphi(ka) = ka\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_s}\right) =$$

$$= a\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)k\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_s}\right) = \varphi(a)m,$$

ahol $m = k\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_s}\right) \in \mathbf{N}^+$. Ezzel lemmánkat beláttuk.

Ezek után rátérhetünk a 2. állítás *bizonyítására:* Mivel q négyzetmentes, azért az 1. lemma következménye szerint igaz a $(*)$ képlet, miszerint: Bármely $m \in \mathbf{N}^+$ esetén:

$$m^{\varphi\left(\frac{q}{(m,q)}\right)} \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ \frac{q}{(m,q)}\right), \text{ azaz } \frac{q}{(m,q)} \Big| \left(m^{\varphi\left(\frac{q}{(m,q)}\right)} - 1\right),$$

ezért

$$q \mid \left((m,q)\left(m^{\varphi\left(\frac{q}{(m,q)}\right)} - 1\right)\right).$$

Emiatt, valamint a 2. lemmából nyert: $\left(m^{\varphi\left(\frac{q}{(m,q)}\right)} - 1\right) \mid (m^{\varphi(q)} - 1)$ oszthatóság miatt nyilvánvaló, hogy: $q \mid ((m,q)(m^{\varphi(q)} - 1))$, és ezért: $q \mid (m(m^{\varphi(q)} - 1))$, azaz: $q \mid (m^{\varphi(q)+1} - m)$, vagyis $m^{\varphi(q)+1} \equiv m \pmod q$. Tehát bármely $m \in \mathbf{N}^+$ esetén: $m^{\varphi(q)+1} \equiv m \pmod q$. Ezzel állításunkat beláttuk.

Tehát az 1. és a 2. állítás alapján a következő mondható: q-as $(q \in \mathbf{N}^+, q \geqq 2)$ alapszámú számrendszerben akkor és csak akkor van olyan univerzális $n > 1$ kitevő, hogy minden $0 \leqq m \leqq q-1$-re $q \mid m^n - m$ teljesül, ha q négyzetmentes.

Ezek után arra próbálunk választ adni, hogy négyzetmentes alapszámú számrendszerben hogyan lehet meghatározni azt a *minimális* 1-nél nagyobb univerzális hatványkitevőt, amelyre bármely természetes számot emelve az adott számrendszerben ugyanarra a számjegyre végződőt nyerünk, mint amire maga a szám; valamint ezen *minimális* univerzális hatványkitevő milyen kapcsolatban áll az összes többi univerzális hatványkitevővel. Még mielőtt ezzel kapcsolatos állítást mondanánk ki, két lemmát ismertetünk:

3. Lemma: Ha $a^n \equiv 1 \pmod b$, valamint $a^{n_0} \equiv 1 \pmod b$, ahol n_0 *minimális,* akkor: $n_0 \mid n$.

Bizonyítás: Az euklideszi maradékos osztás miatt egyértelműen létezik olyan $r, s \in \mathbf{N}$, hogy $n = rn_0 + s$, ahol $0 \leqq s < n_0$. Ezért: $a^n = a^{rn_0+s} = a^{rn_0} \cdot a^s = (a^{n_0})^r a^s \equiv 1^r \cdot a^s = a^s \pmod b$, azaz: $a^n \equiv a^s \pmod b$, másrészt $a^n \equiv 1 \pmod b$, tehát $a^s \equiv 1 \pmod b$, ahol $0 \leqq s < n_0$, amely n_0 minimális volta miatt csak úgy lehetséges, ha $s = 0$.
Tehát $n = rn_0$, azaz $n_0 \mid n$. Ezzel lemmánkat beláttuk.

4. Lemma: Ha $a^n \equiv a \pmod b$, valamint $a^{n_0} \equiv a \pmod b$, ahol $n, n_0 \geqq 2$ és n_0 minimális, akkor: $(n_0 - 1) \mid (n-1)$.

Bizonyítás: $a^n \equiv a \pmod b$ akkor és csak akkor, ha $b \mid (a^n - a) = a(a^{n-1} - 1)$, aminek szükséges és elégséges feltétele az, hogy $\frac{b}{(a,b)} \Big| \left(\frac{a}{(a,b)}(a^{n-1} - 1)\right)$, így $\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}\right) = 1$ és az általános prímtulajdonság miatt: $\frac{b}{(a,b)} \mid (a^{n-1} - 1)$,

tehát $a^{n-1} \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ \frac{b}{(a,b)}\right)$, amelyhez hasonlóan $a^{n_0-1} \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ \frac{b}{(a,b)}\right)$, ahol n_0 minimális volta miatt n_0-1 is az, ezért a 3. lemma miatt: $(n_0-1)|(n-1)$. Ezzel lemmánkat beláttuk.

Megjegyzések: 1. A 3. és a 4. lemma alábbi megfordításai nyilván igazak: Ha $k \in \mathbf{N}^+$, úgy: $a^n \equiv 1 \pmod b$ esetén $a^{kn} \equiv 1 \pmod b$, és $a^n \equiv a \pmod b$ esetén $a^{kn-k+1} \equiv a \pmod b$, ugyanis: Ha $a^n \equiv 1 \pmod b$, azaz: $b|(a^n-1)$, akkor $(a^n-1)|((a^n)^k-1)=(a^{nk}-1)$ miatt $b|(a^{kn}-1)$, tehát $a^{kn} \equiv 1 \pmod b$, illetve ha $a^n \equiv 1 \pmod b$, azaz $b|(a^n-a)= =a(a^{n-1}-1)$, akkor $(a^{n-1}-1)|((a^{n-1})^k-1)=a^{nk-k}-1$ miatt $b|(a^{nk-k+1}-a)$, tehát $a^{kn-k+1} \equiv a \pmod b$.

2. Nyilvánvaló, hogy: *a)* ha $a^n \equiv 1 \pmod b$, akkor $a^{n+1} \equiv a \pmod b$, valamint: *b)* ha $a^n \equiv a \pmod b$, akkor tetszőleges $k \in \mathbf{N}$ esetén $a^{kn}=(a^n)^k \equiv a^k \pmod b$, azaz: $a^{kn} \equiv a^k \pmod b$.

3. Állítás: Legyen q négyzetmentes, valamint jelölje bármely $0 \leqq m \leqq q-1$ esetén: $t_m := \min \{x \in \mathbf{N}^+ | x \geqq 2$ és $m^x \equiv m \pmod q\}$, vagyis:

a) $t_m \geqq 2$ $(t_m \in \mathbf{N}^+)$,
b) $m^{t_m} \equiv m \pmod q$,
c) Ha $x \in \mathbf{N}^+$, $x \geqq 2$, és $m^x \equiv m \pmod q$, akkor $x \geqq t_m$.

Ilyen t_m, q négyzetmentes volta miatt, bármely $0 \leqq m \leqq q-1$ esetén létezik. Ezek után ha: $n_0=[t_0-1, t_1-1, \ldots, t_{q-1}-1]+1$, ahol $[.,.,\ldots,.]$ a q darab természetes szám l.k.k.t.-ét jelöli, akkor minden természetes szám n_0-adik hatványa a q-as alapszámú számrendszerben ugyanarra a számjegyre végződik, mint amire maga a szám, tehát n_0 univerzális hatványkitevő, valamint ez a *minimális* ilyen szám, azaz ha n is rendelkezik az előbbi tulajdonsággal, akkor $n \geqq n_0$.

Bizonyítás: Mivel q négyzetmentes, azért az 1. lemma következménye szerint igaz a $(*)$ képlet, miszerint: Bármely $m \in \mathbf{N}^+$ esetén: $m^{\varphi\left(\frac{q}{(m,q)}\right)} \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ \frac{q}{(m,q)}\right)$. Ezért bármely $m \in \mathbf{N}^+$ esetén egyértelműen létezik olyan $t'_m \in \mathbf{N}^+$ *minimális* hatványkitevő, melyre: $m^{t'_m} \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ \frac{q}{(m,q)}\right)$, azaz $\frac{q}{(m,q)} | (m^{t'_m}-1)$, amelyből: $q|((m,q)(m^{t'_m}-1))$, ezért $(m,q)|m$ miatt: $q|(m(m^{t'_m}-1))$, azaz: $q|(m^{t'_m+1}-m)$, tehát: $m^{t'_m+1} \equiv m \pmod q$.

Így ha $t_m := t'_m+1$, akkor $m^{t_m} \equiv m \pmod q$, bármely $m \in \mathbf{N}^+$, és ezért bármely $m=1, 2, \ldots, q-1$ esetén.

Könnyen belátható, hogy az előbb előállított t_m-ek az állításban definiált t_m-ekkel egyeznek meg.

Ehhez csak azt kell meggondolni, hogy $t_m \geqq 2$ és t_m-ek minimálisak. $t_m \geqq 2$, mivel $t'_m \in \mathbf{N}^+$ és $t_m=t'_m+1$. t_m minimális, ugyanis ha $n \geqq 2$ és $m^n \equiv m \pmod q$, azaz: $q|(m^n-m)$, vagyis: $q|(m(m^{n-1}-1))$, akkor: $\frac{q}{(m,q)} \left| \left(\frac{m}{(m,q)}(m^{n-1}-1)\right)\right.$, és így $\left(\frac{q}{(m,q)}, \frac{m}{(m,q)}\right)=1$, valamint az általános prímtulajdonság miatt: $\frac{q}{(m,q)} | (m^{n-1}-1)$, tehát: $m^{n-1} \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ \frac{q}{(m,q)}\right)$, melyből t'_m definíciója folytán: $t'_m \leqq n-1$, vagyis: $t_m=t'_m+1 \leqq n$, azaz: $t_m \leqq n$.

Nyilvánvaló, hogy $m=0$-ra: $0^2=0 \equiv 0 \pmod q$, ezért $t_0=2$, valamint $m=1$-re: $1^2=1 \equiv 1 \pmod q$, ezért $t_1=2$.

Ezek után jelölje n_0 az állításban definiáltat, azaz:

$$n_0 := [t_0-1, t_1-1, \ldots, t_{q-1}-1]+1 \quad (=[1, 1, t'_2, t'_3, \ldots, t'_{q-1}]+1) \quad (t'_0 = t'_1 = 1).$$

Belátjuk, hogy bármely $m=0, 1, \ldots, q-1$-re: $m^{n_0} \equiv m \pmod q$. Ha $m=0$, akkor nyilvánvaló, ha $m=1, 2, \ldots, q-1$, akkor pedig: $t'_m=(t_m-1)|(n_0-1)$, ezért egyértelműen létezik olyan $s_m \in \mathbf{N}^+$, amelyre: $n_0-1=s_m(t_m-1)$, azaz: $n_0=s_m(t_m-1)+1$, ezért:

$$m^{n_0} = m^{s_m(t_m-1)+1} = m^{s_m t_m - s_m + 1} = \frac{m^{s_m t_m} \cdot m}{m^{s_m}} = \frac{(m^{t_m})^{s_m}}{m^{s_m}} \cdot m \equiv$$

$$\equiv \frac{m^{s_m}}{m^{s_m}} \cdot m = m \pmod q, \text{ azaz: } m^{n_0} \equiv m \pmod q.$$

Be kell még látni, hogy n_0 minimális. Ha $n \in \mathbf{N}^+$, $n \geqq 2$ olyan, melyre bármely $m=0, 1, \ldots, q-1$ esetén $m^n \equiv m \pmod q$, akkor a 4. lemma szerint: $t'_m=(t_m-1)|(n-1)$, bármely $m=0, 1, \ldots, q-1$ esetén, ezért

$$(n_0-1) := [t_0-1, t_1-1, \ldots, t_{q-1}-1] = [t'_0, t'_1, \ldots, t'_{q-1}] \,|\, (n-1),$$

azaz $(n_0-1)|(n-1)$, vagyis: $n_0-1 \leqq n-1$, így: $n_0 \leqq n$.

Ezzel állításunkat maradéktalanul beláttuk.

Megjegyzések: 1. A 3. állítás bizonyításában szereplő t'_m számot m rendjének nevezzük, illetve azt mondjuk, hogy az m szám a t'_m kitevőhöz tartozik mod r, ahol esetünkben $r=\frac{q}{(m, q)}$. (Lásd: Lánczi Ivánné, Turán Pál: Számelmélet, Kézirat. Tankönyvkiadó, 1971. (J3—664), 88. oldal. D. 3.1. def.-t).

2. A 3. állítás bizonyításának befejező részében nyertük, hogy: $(n_0-1)|(n-1)$, ahol $n_0, n \in \mathbf{N}^+$, $n_0, n \geqq 2$, valamint bármely $m=0, 1, \ldots, q-1$ esetén $m^{n_0} \equiv m \pmod q$, $m^n \equiv m \pmod q$ és n_0 *minimális*, q pedig négyzetmentes.

Következmény: A 3. állítás bizonyításának utolsó részéből, illetve az azt követő 2. megjegyzésből, illetve 4. lemmából, valamint a 2. állításból nyilvánvaló, hogy: $(n_0-1)|\varphi(q)$, ahol n_0 a 3. állításban definiált.

Végezetül egy HT-1080Z School-Computer gépre írt BASIC-programot ismertetek, amely tetszőleges $q \in \mathbf{N}^+$, $q \geqq 2$ számról eldönti, hogy négyzetmentes-e, vagy sem, ha igen, akkor a 3. állításban szereplő $t_0, t_1, \ldots, t_{q-1}$, valamint az n_0 számokat generálja. Ezt a programban Q-funkciónak neveztem el. Mivel n_0 előállításához több szám l.k.k.t.-e szükséges, azért e program tetszőleges sok természetes szám l.n.k.o.-ját és l.k.k.t.-ét is meg tudja adni.

```
10  CLS
20  DEFINT I,J,K,L,M,Q,R,S,U,V,W
30  A $=" 1. Q-FUNKCIO"
40  B $=" 2. L.N.K.O.—L.K.K.T."
50  PRINT: PRINT A$: PRINT
60  PRINT: PRINT B$
70  C$= INKEY$
80  IF C$="1" THEN GOTO 200
90  IF C$="2" THEN GOTO 500
100 GOTO 70
200 CL$
210 PRINT A$: PRINT: PRINT
220 INPUT "Q="; Q
230 IF Q<2 THEN GOTO 220
```

```
240 IF Q=4*INT (Q/4) THEN GOTO 290
250 K=3
260 IF K*K>Q THEN GOTO 300
270 IF Q=K*K*INT(Q/(K*K)) THEN GOTO 290
280 K=K+2: GOTO 260
290 PRINT:PRINT "; NEM NEGYZETMENTES !" :GOTO 410
300 PRINT:PRINT "Q NEGYZETMENTES !"
310 S=1:T=2
320 IF Q=2 THEN GOTO 400
330 FOR I=2 TO Q—1
340 J=2:N=I
350 N=N*I : N=N—INT(N/Q)*Q
360 IF N<>I THEN J=J+1 : GOTO 350
370 R=J—1: GOSUB 850
380 NEXT I
390 T=T+1
400 PRINT "UNIVERZALIS MINIMALIS N0= ";T
410 PRINT: PRINT:PRINT"TETSZOLEGES BILLENTYU LEUTESERE VAROK !"
420 C$= INKEY$
430 IF C$="" THEN GOTO 420
440 GOTO 10
500 CLS
510 PRINT B$: PRINT: PRINT
520 PRINT "KILEPES: ⟨NEW LINE⟩ VAGY (0 ES ⟨NEW LINE⟩)": PRINT: PRINT
530 PRINT „ "L.N.K.O.", "L.K.K.T.": PRINT
540 N=1
550 GOSUB 700
560 IF L=1 THEN GOTO 10
570 S=R : T=R : PRINT S,T
580 N=N+1
590 GOSUB 700
600 IF L=1 THEN GOTO 10
610 GOSUB 800 : GOSUB 850
620 PRINT S,T
630 GOTO 580
700 L=0 : R=0
710 INPUT R : PRINT CHR$ (27); R,,
720 IFR=0 THEN L=1
730 RETURN
800 K=R: L=S
810 M=K—INT (K/L)*L
820 IF M<>0 THEN K=L: L=M: GOTO 810
830 S=L
840 RETURN
850 U=R: V=T
860 W=U—INT (U/V)*V
870 IF W<>0 THEN U=V:V=W: GOTO 860
880 T=T*R/V
890 RETURN
```

Rátz László Vándorgyűlés Nagykanizsán

A Bolyai János Matematikai Társulat az 1987. évi (sorrendben a huszonhetedik) Rátz László Vándorgyűlést Nagykanizsán rendezte meg 1987. július 7-e és július 10-e között.

A vándorgyűlést **Surányi János**, a Bolyai János Matematikai Társulat tiszteletbeli elnöke nyitotta meg, majd **Dávid László** a Művelődési Minisztérium, **Szalay Dénes** a Zala Megyei Tanács nevében köszöntötte a résztvevőket.

A plenáris ülés első részében az 1987. évi *Beke Manó Emlékdíjakat* adták át. A Beke

Manó Emlékdíj Bizottság határozata értelmében a Bolyai János Matematikai Társulat 1987-ben a Beke Manó Emlékdíj *II. fokozatával* a következő kartársakat tünteti ki:

Brenyó Mihálynét, a kecskeméti Kodály Zoltán Ének-Zenei Általános Iskola, Gimnázium és Zeneművészeti Szakközépiskola igazgatóhelyettesét;

dr. Gehér Lászlót, a József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézetének adjunktusát;

dr. Harsányi Lászlónét, a budapesti Földes Ferenc Kereskedelmi Szakközépiskola tanárát;

Huttmann Ferencnét, a zalaegerszegi Petőfi Sándor Általános Iskola igazgatóhelyettesét;

dr. Koller Lászlónét, az Országos Pedagógiai Intézet matematikai osztályának munkatársát;

Tóth Tiborné dr.-t, a mosonmagyaróvári Kossuth Lajos Gimnázium és Szakközépiskola tanárát, a Győr-Sopron megyei középiskolai szaktanácsadót;

Vörös Sándort, a budapesti Varga Jenő Közgazdasági Szakközépiskola tanárát, szaktanácsadót.

A plenáris ülés második részében **Pogány Károly** *A számítástechnika és a gazdasági verseny,* majd **Laczkovich Miklós** *Megalapozott és megalapozatlan sejtések* című előadása hangzott el.

A vándorgyűlés többi napján a munka négy szekcióban folytatódott, de néhány előadás több szekció közös rendezvénye volt.

Az általános iskolai **alsó tagozatos szekcióban** a következő előadásokat hallgathatták meg a résztvevők:

Lengyelné Szilágyi Ágnes: *Ami a geometria tantervéből kimaradt* (Gumi-geometria);

Szendrei Julianna: *Tudod, mit építettem?*

Török Judit: *Változatok egy témára;*

Imrecze Zoltánné: *Közös gondok — közös gondolatok;*

Káldi Éva: *Új munkalapok a 4. osztályban;*

Kovács Éva: *Szövegértés — szöveges feladatok.*

Az alsó tagozatos feladatmegoldó szemináriumokat **Kopasz Éva, Hegedűs József, Fábos Lászlóné** és **Sáraczné Füzes Katalin** vezette.

Az általános iskolai **felső tagozatos szekcióban** elhangzott előadások:

Pogáts Ferenc: *Van-e legnagyobb?*

Laczkovich Miklós: *Függvények;*

Koller Lászlóné: *Gondolatok egy szakmunkásképző-iskolai felmérésről* (ankét);

Lajos Józsefné: *Tehetséggondozás tanórán kívül;*

Urbán János: *A matematika tananyaga és gondolkodásmódja* (halmazok, logika);

Novák Lászlóné: *A tanterv, a taneszközök és a pedagógiai gyakorlat összhangjának kérdései;*

Hajdú Sándor: *Az új taneszköz-családról.*

A felső tagozatos szekció feladatmegoldó szemináriumait **Kovács Csongorné** és **Hegyvári Norbert** vezette.

A **középiskolai szekcióban** a következő előadások szerepeltek:

Reimann Istvánné: *Válogatás a műszaki főiskolák Hajós György Matematikai Tanulmányi Versenyének anyagából;*

Petruska György: *Komplex függvénytan elemi módszerekkel;*

Simonovits Miklós: *Mit tanítsunk számítástechnikából középiskolában?* (Egy kísérletről.);
Czapári Endre: *Várható tananyag-átcsoportosítás a szakközépiskolákban;*
Cseke Zoltán: *A tehetséggondozás zalai gyakorlata.*

A középiskolai feladatmegoldó szemináriumokat **Kővári Károly, Kántor Sándorné** és **Rácz János** vezette.

A **felsőoktatási szekció** a következő előadásokat tűzte programjára:
Ábrahám István: *Tankönyvek az alkalmazott matematika egyéni tanulására;*
Bognár Stefánia: *Az 1986. és 1987. évi felvételi vizsgák tapasztalatairól.*

A tanártovábbképzés tapasztalatait ankéton beszélték meg.

A hazánkban 1988. július 27. és augusztus 3. között megrendezésre kerülő ICME—6 (Sixth International Congress on Mathematical Education) jelentőségét és feladatait **Nemetz Tibor** ismertette.

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Videóstúdiója két felvételt mutatott be, Fischer Sándor beszédtechnikai szemináriuma egy részletét és Rácz János Az inverzió tanítása című anyagának egy részletét. A bemutatók után **Surányi János** a Társulat újjáalakulásának 40. évfordulójáról emlékezett meg.

A több mint 500 résztvevő a szakmai programokon kívül szervezett városnézésen, a Zalaegerszeg, Keszthely, Kis-Balaton—Zalakaros kirándulások egyikén vehetett részt, továbbá egy hangulatos vacsora élményével gazdagodott.
Az 1988. évi vándorgyűlést a Társulat Debrecenben rendezi meg.

(Sch. V.)

SZALONTAI TIBOR
főiskolai tanársegéd
Nyíregyháza

Higgyük? Hihetjük?

Első gondolatok Újvári István: „Egyedül készülök a felvételire! Összefoglaló matematikából" című munkájáról

Aki részt vett már matematika írásbeli felvételi dolgozatok javításában és a felvételi vizsgabizottság munkájában, a szóbelin, az jól tudja, hogy a jelöltek tudásszintje mennyire különböző lehet. De még a rutinos javítók, vizsgáztatók is meglepődnek olykor-olykor. (A tavalyi „termésből": műveleti sorrendet nem tudja; negatív számból négyzetgyököt von; 2,45 természetes szám; $y=\lg x$ grafikonja metszi az y tengelyt az origóban; minden rombusz húrnégyszög; *sin*-szal lehet egyszerűsíteni a törtet; stb.)

Az 1987. évi adat szerint a felsőoktatásba igyekvő felvételizőknek mintegy a harmada már csak azért sem volt felvehető, mert vagy mindkét tárgyból 5 pont alatt teljesített, vagy nem érte el a felvételin a 30 pontot. Tartok attól, hogy matematikából az átlagosnál rosszabb a helyzet. Ezen belül is lesújtó a tanárképző főiskolák és a kevésbé keresett műszaki főiskolák tapasztalata. (Nálunk — BGyTKF, Nyíregyháza — például egyetlen 14 pontos dolgozat volt a csúcs.) Különösen elgondolkodtató, hogy a nagyon gyengék egy jelentős része nappali negyedikes, vagy egy éve érettségizett tanuló.

A gyengeségek lehetséges okainak mélyebb elemzésére itt nincs mód. Ehelyett néhány közhely segítségével jelzem személyes véleményemet:

— A továbbtanulni szándékozók akarati, önismereti, egyáltalán neveltségi szintjében nagy eltérések vannak és

a gyakoriság a negatív irányban a nagyobb. Oka a társadalom, a család, az iskola, a fiatal — ebben a sorrendben.

— A jelöltek nagy része jobb osztályzatot kap, mint azt tényleges írásbeli és szóbeli teljesítményképes tudása kívánná. Oka elsősorban egyes szaktanárok, néha iskolák tudatos vagy akaratlan liberalizmusa, megalkuvása, amely mögött esetleg saját szakmai vagy pedagógiai gyengeségük húzódik. Kapcsolatban áll ez a gimnáziumok, szakközépiskolák elhamarkodott mennyiségi felduzzasztásával is.

— A régebben érettségizettek, bár sokszor komolyabban veszik a tanulást, munka mellett természetesen nehezebben tudnak tanulni, többnyire hátrányos helyzetből indulnak egy becsületes középiskolai becsületes nappali tanulójához képest.

— Az érvényes tankönyvek, a „zöld" példatár módszertanilag nem segítik eléggé az önálló és differenciált tanulási módszerek alkalmazását, valamint a továbbtanuláshoz szükséges írásbeli és szóbeli követelményekre való árnyalt ráhangolást.

Ilyen körülmények között mit várhatunk az 1987. májusában megjelent újabb előkészítő könyvtől?

Állítom, hogy *jóval többet, mint azt gondolná tanár vagy diák.* Annak realitása ugyan kérdéses, amit a szerző előszavában önbizalomerősítőként megfogalmaz: „... akármilyen régen vagy mostanában, de nem elegendő eredménnyel tanulta is a matematikát, ennek a könyvnek a segítségével, tanulási útmutatóinak pontos betartásával *igen alacsony fokról indulva* is eljuthat a kívánt tudásszintig. Persze ehhez nagy akaraterőre, kitartásra lesz szükség...".

Egyrészt, az az indulási szint azért nem lehet akármilyen alacsony, hiszen az I. rész „Alapfokról indulunk!" és a II. rész „Rutinfeladatok" 14+4 heti anyagát az tudja alkalmazásképpen elsajátítani, akinek nem lesznek lényeges megértési gondjai, ráismer a régebben tanultakra és *ismeretrendszert* tud mozgósítani vagy kiépíteni, nehézség nélküli begyakorlottsági szinten meg tudja oldani az ellenőrző kérdéseket és feladatokat, valamint (a szóbelire is gondolva) képes memorizálni a legszükségesebbeket.

Másrészt, a felkészítéssel foglalkozók tudják, hogy éppen a sok évet kihagyók és az iskolában gyengén teljesítők zöme adja a felkészíthetetlenek derékhadát. Az életkor, azaz a kihagyás mértéke, a rögződött tanulási esetleg „nem-tanulási" szokások és az adottság által is megszabott képességszint még fejlett akaraterő és szakszerű személyes felkészítés mellett is behatárolja a lehetőségeket. Az előszó, ettől az esetleg félrevezető fogalmazástól eltekintve, világosan megmondja, hogy kinek és milyen módon érdemes a könyvvel dolgoznia. Elsősorban a régebben végzettek és az esti-levelező tagozatosok érdeklődő részét célozza meg, de természetesen a nappali tagozatot sem zárja ki. Külön gondol a tanítóképző főiskolákba pályázókra is.

A szerző több *újítása* is arra szolgál, hogy megvalósítsa a *rátermett, de segítségre szoruló* tanuló felzárkóztatását és fejlesztését:

1. *Újszerű tagolás,* mely a *spirális tanulási szerkezetet* biztosítja.

Az I. rész, az „Alapfokról indulunk!" (103 oldalon, 14 hétre bontva) felsorolja a lényeges elméleti tudnivalókat és ellenőrzi is a tudást. Minden témában a következő felosztást találjuk: Fogalmak, ismeretek; Tételek; Eljárások; Kiegészítések; Jelölések; Ellenőrző kérdések; Ellenőrző feladatok. Hátul bőséges megoldási útmutatók szerepelnek. Ezt a részt jól használhatónak ítélem meg az önálló tanulásra, ismeretfrissítésre, rendszerezésre, önellenőrzésre. A szerző helyesen figyelmezteti az olvasót, hogy ezen rész megértésének hiányában a felvételi feladatokat sem érti meg.

A II. rész, a „Rutinfeladatok" 26 ol-

dala (4 hét) az első rész alapeljárásainál egy fokkal magasabbra lép és a felvételi feladatok befejezéséhez szükséges rutinokat „idegzi be". Négy témába csoportosítva eljárásokat mutat be, majd ellenőrző feladatokat ad hátravitt megoldásokkal.

Véleményem szerint, aki nem tud önállóan megfelelő eredményt elkönyvelni e két részben, az jobban teszi, ha tanfolyammal próbálkozik, vagy magántanárt keres tanácsért, segítségért. A szakember többnyire rövid időn belül közli véleményét a jelölt esélyeiről. Más lehetőség, hogy újra kezdi az önálló tanulást, esetleg (ideiglenesen) lemond tervéről.

A III. rész, „37 megoldási ötlet és módszer" (96 oldalon 10 hétre tervezve) az igazi felvételi előkészítés. A képességek szerinti differenciálódás felfokozódik, e könyv keretein belül pedig be is fejeződik. Itt már lényeges, előnyös az önálló küszködés. Minden ötletnél kidolgozott példák, majd tapasztalatösszegzés található. Ezt követi a nehezedő ellenőrző feladatsor hátravitt megoldásokkal.

2. Ez a III. rész magában is újítás. Eltér a megszokott tematikus csoportosítástól. Egy-egy ötlet köré vesz több témához tartozó feladatokat is, ami nagy segítség a jelölt számára. Időben is optimalizálhatja a felkészülést, másrészt új szempontok szerint rendezi alakuló problémamegoldó algoritmusait.

3. A IV. rész „Írásbeli feladatsorai" (9 oldal, 4 hét) az elmúlt négy év 12 feladatsorának 1—5. feladatát tartalmazza. A szerző nem indokolja meg ezt a szűkítést. Sejthetően nem akar hamis illúziókat kelteni az eddig eljutókban (annak ellenére, hogy a III. részben jócskán találunk 6—7. erősségű példákat, feladatokat is), viszont óvatos garanciát érezhetünk ki az idáig sikeresen fejlődők számára az 1—5. szintű sávra nézve, amennyiben most is jó eredményt érnek el.

Tudjuk, hogy az elsősorban célzott tábor számára, de a fogadó iskolák számára is megnyugtató volna az 1—5. feladatsáv biztonságos megoldása. Hiányolom viszont a bevezetőből vagy az útmutatóból a sikeresek továbbirányítását erősebb célt kitűző előkészítő könyvek vagy pl. a KÖMAL felé.

Izgalmas módszertani fogás, hogy az évenkénti három feladatsor megoldási útmutatója fokozatosan szűkül.

4. Kissé rövidnek tűnik az V. rész, „Készüljünk a szóbelire!" (9 oldal, 4 hét), ha már ezt is felvállalta a szerző.

Az előző fejezetek feladataihoz még 20 „vizsgafeladat" járul, vizsgahangulatot érzékeltető segítő kérdésekkel, ami újdonságnak számít. Két hétig geometriai tételek bizonyítása, majd utolsó héten néhány egyéb tétel bizonyítása szerepel.

5. A megoldások több mint 120 oldalt tesznek ki, ami — figyelembe véve az egyes fejezetekben és a hivatkozott tankönyvben válogatott mintapéldák nagy számát is — már magában meggyőz arról, hogy a könyv hasznos segítőeszköz lesz.

Összegezve: A tanár szemével nézve ez a munka mind módszertani ötletek, újítások, mind a feladatok válogatása és tálalása szempontjából világos és erőteljes koncepciót mutat. Egy tapasztalt tanár míves gondosságú terméke, reális alapokról induló és reálisan fokozatos, korszerű eszköz.

Szerintem címétől némileg eltérő módon, hagyományos vagy levelező tanfolyamok vezéranyagaként használva, hamarosan észrevehető lenne a hatása a felvételi vizsgákon, feltételezve, hogy az önállóság és az önkontroll marad a domináns tényező, míg a tanfolyamvezető inkább mint konzulens és nevelő működik.

Hihetjük-e, hogy ez a könyv észrevehetően javítja majd matematikából pályázó fiataljaink teljesítményét? Ez sok mindentől függ, úgy a gyakorlat adhatja meg a választ. Azt viszont javasolhatom tanárnak és diáknak, hogy ismerkedjenek meg ennek a könyvnek az értékeivel és *higgyenek bátran* segítő erejében.

ÚJVÁRI ISTVÁN
vezető tanár
Lőwy Sándor Műszaki Szakközépiskola, Vác

Emlékversenyek feladatairól

Az örvendetesen szaporodó matematikai tehetségkutató versenyeket a rendező iskolák mindinkább volt híres tanárukról, névadójukról nevezik el. A névadó kultuszával kapcsolatos hagyományok ápolásának természetes gyakorló területe a humán tárgyak tanulmányi versenyei és az osztályfőnöki óra. A matematikaversenyek feladatsoraiban is szerepeltethetünk azonban egy-egy aktuális feladatot, megmutatva a szaktárgyunkban rejlő lehetőségeket. Leginkább az életrajzi adatok alkalmasak arra, hogy segítségükkel ismert matematikai feladatokat átalakítsunk.

Az elmúlt évek Öveges József Emlékversenyén, melyet a tatai Eötvös József Gimnázium rendez, valamint a váci Lőwy Sándor Műszaki Szakközépiskola és a váci Juhász Gyula Általános Iskola matematikai tehetségkutató versenyén szerepeltek az alábbi feladatok:

1. Kilencven évvel ezelőtt, 1895-ben született Öveges József. Erre emlékezve készíts egy tetsző leges tartalmú, értelmes magyar mondatot a következő feltételekkel:
   a) legfelj bb ötven betűből álljon;
   b) felfogható legyen „kronogrammának", azaz ha mindazokat a betűket, amelyek római számírásban számnak is olvashatók (M, D, C, L, X, V, I) önálló számként összeadjuk, pontosan 1895-öt kapjunk! (Pl. VaLaMIVeL= 1111.)
2. Egy négyjegyű szám tízes számrendszerbeli alakja: TATA. (Az azonos betűk azonos számjegyet jelentenek.) Cseréljük fel bármelyik két szomszédos számjegyét, és az így kapott számot szorozzuk meg az eredetivel! Igazoljuk, hogy bármely „TATA" alakú szám esetén a szorzat mindig osztható 1111-gyel!
3. Írjunk az azonos betűk helyére azonos, a különböző betűk helyére különböző számokat úgy, hogy az összeadás helyes legyen! (Az NY egy betűnek számít!)

$$\begin{array}{r} \text{TATA I} \\ \text{ÖVEGE S} \\ \hline \text{VERSENY} \end{array}$$

4. Iskolánk névadójára, Lőwy Sándorra emlékezünk az alábbi feladattal:
   Születési évének (1906) számjegyeivel, valamint egy megfelelően választott ötödik számjegynek a felhasználásával hány olyan ötjegyű szám írható fel, amely 45-tel osztható? (Az öt számjegy mindegyikét pontosan egyszer lehet felhasználni egy-egy ötjegyű szám felírásához.) Melyik ezek közül a legnagyobb és melyik a legkisebb?
5. Juhász Gyula 16 évesen került Vácra. 19 éves volt, amikor beiratkozott a pesti egyetemre. 22 évesen került kapcsolatba Adyval. Első két verseskötete 24 és 31 éves korában jelent meg. Amikor a Petőfi Társaság tagja lett, 37 éves volt. 54 évet élt.
   A fenti életrajzban szereplő kétjegyű számokat (16, 19, 22, 24, 31, 37, 54) állítsd elő az évszámunk számjegyeinek (1, 9, 8, 7) pontosan egyszer történő felhasználásával, tetszőleges műveletek segítségével. (Pl. $10=1+9^{8-7}$, vagy $11=\sqrt{81}+9-7$ stb.)
6. Melyik az a négyjegyű szám, amellyel 14000-et osztva 490-et, 22000-et osztva 770-et kapunk maradékul?
   (A keresett szám azonos azzal az évszámmal, amikor Juhász Gyula jelentős irodalmi díjat kapott.)

A 3. feladat egy jól ismert fejtörőtípus aktualizált példánya. Magunk is készíthetünk ilyeneket, például különböző városok iskolái közötti matematikaversenyekre. Szellemes megoldási módszerük található a BARTHA—KUN: Válogatott fejezetek a matematikából c. szakköri füzet 183—184. oldalán. Megjegyezzük azonban e feladattípus hátrányát is: a több (olykor 100-nál is több) helyes megoldást, mely a javításnál nem előny. Az alábbi feladatoknak is több megoldása van, de itt csak egyet közlünk:

7.	PÁPA	8 680		9.	ÉRD	742
	+ PÉCS	+ 8 274			+ TATA	+ 9 696
	VÁROS	16 954			VÁROS	10 438
8.	PAKS	7 928		10.	VÁC	156
	+ SOLT	+ 8 530			PÁPA	7 574
	VÁROS	16 458			+ PÉCS	+ 7 362
					VÁROS	15 092

Végezetül bemutatunk még néhány feladatot, amelyek közismert feladatok adaptációi a helyi közlekedési viszonyokra:

11. Közút hiányában jelenleg Kosdról Rádra csak úgy juthatunk el, ha DNy irányban Vácig 6 km-t, innen K-re 10 km-t, majd É-ra 4 km-t teszünk meg. Hány kilométert nyernénk, ha megépítenék a Kosdot Ráddal összekötő utat? Mekkora az utak által határolt négyszög alakú földterület?

12. A Budapestről 7 órakor induló személyhajó 12 órára ér Esztergomba. Az Esztergomból 8 órakor induló hajó pedig 11 óra 30 perckor ér Budapestre. Ha mindkét hajó sebességét egyenletesnek tekintjük és nem vesszük figyelembe a közbeeső hajóállomásokon eltöltött időt, akkor kb. mikor találkozik a két hajó? Találkozásukig a Budapestről induló az út mekkora részét tette meg?

13. Vácról Budapestre minden egész órában, Budapestről Vácra minden óra 40. percében indul autóbusz. A két végállomás 36 km-re van egymástól. A teljes menetidő 60 perc. Egy Vácról 8 óra 30 perckor Budapestre induló kerékpáros útja egyharmadának megtételekor, 9 óra 20 perckor éppen két egymással szembejövő autóbusz találkozását figyeli meg. Út—idő grafikonról olvassuk le, hány vele egyirányú, illetve szembejövő autóbusszal találkozott a kerékpáros és milyen időpontokban! Mekkora a kerékpáros átlagsebessége?

14. Vác, Dunakeszi, Gödöllő és Aszód — ebben a sorrendben — egy olyan húrnégyszög pontjainak tekinthetők, amely köré írható kör átmérője a Vác—Aszód távolság. A négy helység egyenesnek tekinthető útvonalszakaszokkal van összekötve egymással. Dunakeszi Aszódtól 20 km-re, Vác Gödöllőtől 24 km-re van. Dunakeszi Váctól is, Gödöllőtől is egyenlő távolságra fekszik. Határozzuk meg a teljes úthálózat hosszát!

A matematikaverseny emlékezetes marad a tanuló számára, ha a feladatsorban *egy* (legfeljebb két) aktualizált szövegű feladattal találkozik. Többet nem célszerű szerepeltetni, mert a szándék ellenkezőjére fordul s az erőltetettség hatását keltheti.

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor utca 10., II. 10., 1052.

Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! (Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is!) A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1173. A bíróságon az A, B és C tanúk ugyanazokra a kérdésekre válaszoltak, mindegyikre igennel vagy nemmel. Azokra a kérdésekre, amelyekre B és C is igennel válaszolt, A is igent mondott; amelyekre A mondott igent, azokra B is, és amelyekre B igent mondott, azokra igent mondott A és C közül legalább az egyik is.

Van-e oly kérdés, amelyre A és B különböző választ adott?

1174. Adott a síkban n egységvektor, melyek eredője a **0**. Bizonyítsuk be: minden $1 \leqq k \leqq n$-re van közöttük k olyan, melyek eredőjének hossza legfeljebb 3.

1175. Oldjuk meg a természetes számok halmazán az

$$xy = zt,$$
$$x^2 - y^2 = z^2 + t^2$$

egyenletrendszert!

Sándor József, Farcád

1176. Az $OABC$ tetraéder O csúcsára illeszkedő élek páronként merőlegesek; az ABC lap belső M pontjának a többi laptól való távolsága rendre x, y és z, az O csúcsnak az ABC laptól való távolsága h.

Bizonyítsuk be:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq h^2!$$

Varga István, Nagyszalonta

1177. Igazoljuk, hogy ha az $A_1A_2 \ldots A_n$ ($n \geqq 3$) konvex n-szög szögeinek szinuszai közül bármelyik három számtani, az ezek sorrendjének megfelelő három szög koszinuszának abszolútértéke pedig mértani sorozatot ad, akkor a sokszög szabályos!

Bencze Mihály, Brassó

1178. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}^{-1} = \frac{1}{2n+2} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}^{-1}$$

minden n természetes számra!

Cseh László, Székelyudvarhely

(Feladatmegoldások 1149—1154.)

1149. Az

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} = a,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_{n+1} \quad (n \geqq 1)$$

egyenletrendszernek mely a valós értékre van egyetlen valós megoldása?

Kovács Antal, Kézdivásárhely

Megoldás: A két egyenletet összevetve

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a \quad \text{adódik.}$$

Teljes négyzetté kiegészítést végezve:

$$\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(x_2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \ldots + \left(x_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = a,$$

majd átrendezve:

$$\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(x_n + \frac{1}{2}\right)^2 = a + \frac{n}{4}. \tag{1}$$

A kapott egyenletnek szemléletes jelentést is adhatunk: az n-dimenziós euklideszi térben $r = \sqrt{a + \frac{n}{4}}$ sugarú gömbfelület, amelyet — ha semmi kikötést nem teszünk rá — számtalan sok pont n-es elégít ki. A gömbfelület egyenletét csak egy pont n-es elégíti ki, ha $r = 0$, vagyis

$$a + \frac{n}{4} = 0,$$

amiből

$$a = -\frac{n}{4}$$

adódik, ahol $n \geqq 1$ természetes szám.
Az egyenletrendszer egyetlen megoldása ekkor

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = -\frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \frac{n}{4}.$$

Az (1)-ből adódik az is, hogy ha $a+\frac{n}{4}<0$, akkor egyenletrendszerünknek nincs megoldása a valós számok halmazán, míg ha $a+\frac{n}{4}>0$, úgy az $x_1=\sqrt{a+\frac{n}{4}}-\frac{1}{2}$, $x_2=x_3=\ldots=x_n=-\frac{1}{2}$ és az $x_1=-\sqrt{a+\frac{n}{4}}-\frac{1}{2}$, $x_2=x_3=\ldots=x_n=-\frac{1}{2}$ két különböző megoldása (1)-nek, és ezért több megoldása van egyenletrendszerünknek is.

Bigus Imre, Sárospatak, Cseh László, Székelyudvarhely, Solymár Zoltán, Kalocsa

A megoldók száma: 27.

1150. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszögbe írt kör sugara, továbbá a három oldalhoz írt körök sugarai pontosan akkor lesznek egy mértani sorozat egymásutáni tagjai, ha a háromszög derékszögű!

Csányi Péter, Nagykőrös

Megoldás: A feladat fogalmazása szerint a feltétel szükséges és elegendő, holott valójában csak szükséges. Gondoljunk pl. egy egyenlő szárú derékszögű háromszögre, itt — a beírt és a kívül írt érintőkörök szokásos jelölésével — $\varrho<\varrho_a=\varrho_b<\varrho_c$ (ahol a és b a derékszögű háromszög befogóit, c az átfogóját jelöli) nem alkothatnak mértani sorozatot.

Az állítás így igaz: ha ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c egy mértani sorozat szomszédos elemei, akkor a háromszög derékszögű.

Az alábbiakban ezt fogjuk igazolni. Fel fogjuk használni az alábbi közismert összefüggéseket:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a}+\frac{1}{\varrho_b}+\frac{1}{\varrho_c}, \tag{1}$$

$$t = \varrho \cdot s = \varrho_a(s-a) = \varrho_b(s-b) = \varrho_c(s-c), \tag{2}$$

$$t^2 = \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c \cdot \varrho. \tag{3}$$

Legyen $\varrho=1$, $\varrho_a=q$, $\varrho_b=q^2$, $\varrho_c=q^3$. (1) szerint

$$1 = \frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}, \quad \text{illetve} \quad 1+q+q^2 = q^3.$$

Ennek az egyenletnek egyetlen valós gyöke van, ez az

$$f(q) = q^3-q^2-q-1$$

függvény vizsgálatából rögtön látszik:

$$f'(q) = 3q^2-2q-1 = 0, \quad \text{ha} \quad q = 1 \quad \text{vagy} \quad q = -\frac{1}{3};$$

$$f(1) = -2, \quad f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{22}{27}, \quad f(2) = 1, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{11}{8}.$$

A függvénynek valóban egy zéróhelye van, erre $\frac{3}{2}<q<2$. Azok a háromszögek tehát, amelyekben ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c egy mértani sorozat egymást követő elemei, hasonlók. Megmutatjuk: derékszögűek.
(3) alapján $t=q^3$, (2) szerint pedig

$$s = q^3, \quad s-a = q^2, \quad s-b = q, \quad s-c = 1,$$

innen, felhasználva a $q^3=q^2+q+1$ egyenletet:

$$a = s-(s-a) = q^3-q^2 = q+1,$$
$$b = s-(s-b) = q^3-q = q^2+1,$$
$$c = s-(s-c) = q^3-1 = q^2+q.$$

Helyettesítsünk az $a^2+b^2=c^2$ egyenletbe:

$$(q+1)^2+(q^2+1)^2 = (q^2+q)^2,$$

erről pedig egyszerű számolással belátható, hogy azonosság:

$$q^4+3q^2+2q+2 = q^4+2q^3+q^2,$$

ami $q^3=q^2+q+1$ miatt fennáll.

Bencze Mihály, Brassó, Kamarás Lajos, Pécs

A megoldók száma: 31.

1151. Legyen P az $ABCD$ négyzet egy belső pontja és O_1, O_2, O_3, O_4 rendre a PAD, PAB, PBC, PCD háromszögek köré írt kör középpontja. Igazoljuk, hogy ha az $ABCD$ négyzet területének fele az $O_1O_2O_3O_4$ négyszög területével egyenlő, akkor a PO_1AO_2, PO_2BO_3, PO_3CO_4, PO_4DO_1 négyszögek rombuszok!

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

Megoldás: Legyen a négyzet oldala 2 egység, és helyezzük el a Descartes-féle koordináta-rendszerbe az *1. ábra* szerint.

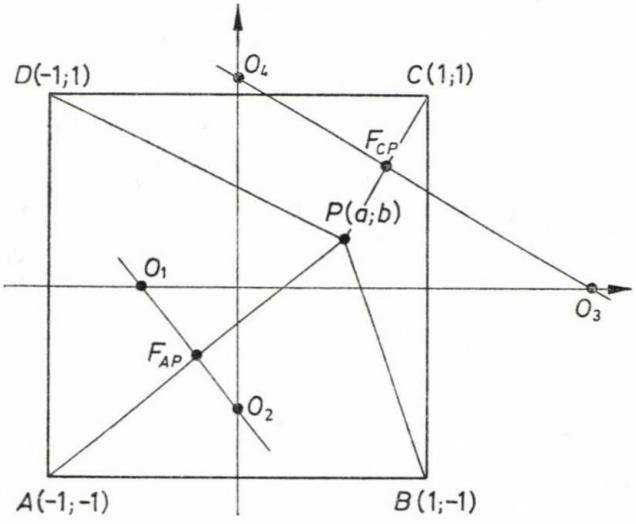
$$\vec{AP} = (a+1;\ b+1), \quad F_{AP} = \left(\frac{a-1}{2};\ \frac{b-1}{2}\right), \quad \vec{CP} = (a-1;\ b-1), \quad F_{CP} = \left(\frac{a+1}{2};\ \frac{b+1}{2}\right),$$

ahol a és b a P pont koordinátáit jelölik. Az O_1O_2, illetve O_3O_4 egyenes egyenlete:

$$(a+1)x+(b+1)y = \frac{a^2-1}{2}+\frac{b^2-1}{2}, \quad (a-1)x+(b-1)y = \frac{a^2-1}{2}+\frac{b^2-1}{2}.$$

Ezekből adódnak a középpontok koordinátái:

$$O_1 = \left(\frac{a-1}{2}+\frac{b^2-1}{2(a+1)};\ 0\right), \quad O_2 = \left(0;\ \frac{a^2-1}{2(b+1)}+\frac{b-1}{2}\right),$$
$$O_3 = \left(\frac{a+1}{2}+\frac{b^2-1}{2(a-1)};\ 0\right), \quad O_4 = \left(0;\ \frac{a^2-1}{2(b-1)}+\frac{b+1}{2}\right).$$



Az $O_1O_2O_3O_4$ négyszög átlói tehát merőlegesek egymásra és hosszuk:

$$O_1O_3 = 1+\frac{b^2-1}{2}\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}\right) = 1+\frac{b^2-1}{a^2-1}; \quad O_2O_4 = 1+\frac{a^2-1}{b^2-1}.$$

Jelölje T e négyszög területét. A négyzet területe 4.

$$2T = \left(1+\frac{b^2-1}{a^2-1}\right)\left(1+\frac{a^2-1}{b^2-1}\right) = 2+\frac{b^2-1}{a^2-1}+\frac{a^2-1}{b^2-1}.$$

Ez akkor és csak akkor egyenlő 4-gyel, ha

$$\frac{b^2-1}{a^2-1} = \frac{a^2-1}{b^2-1} = 1, \quad \text{azaz ha} \quad |a| = |b|.$$

Azt kaptuk eredményül, hogy a területre vonatkozó feltétel akkor és csak akkor áll, ha P valamelyik átló belső pontja. Legyen $P=(p;p)$ az AC átlón *(2. ábra, l. borítón!)*. Ekkor $O_1(p-1;0)$, $O_2(0;p-1)$, $O_3(p+1;0)$, $O_4(0;p+1)$; és így valamennyi oldal hossza $\sqrt{1+p^2}$. A szóban forgó négyszögek tehát rombuszok, ráadásul az A és a C csúcsú rombuszok egybevágók, a másik két rombusz pedig négyzet.

Csorba Ferenc, Győr, Kamarás Lajos, Pécs

A megoldók száma: 19.

1152. n darab zsák mindegyikében vagy csak az ismert súlyú A fajta, vagy csak az 1 ponddal könnyebb B fajtájú golyók vannak bőséges mennyiségben. Határozzuk meg súlyskálás mérlegen való egyetlen méréssel, mely zsákokban találhatók a könnyebb B fajtájú golyók!

Bege Antal, Csíkszereda

Megoldás: A következő, az eredeti feladatnál általánosabb feladatot oldjuk meg: n darab zsák mindegyikében külön-külön azonos súlyú golyók vannak, bőséges mennyiségben. Ha tudjuk, hogy minden egyes zsákban vagy az ismert súlyú golyók vannak, vagy annál $1, 2, \ldots, k$ ponddal könnyebbek, akkor súlyskálás mérlegen, egyetlen méréssel határozzuk meg az egyes zsákokban levő golyók számát!

Eljárásunk a következő:

Rakjuk sorba a zsákokat és számozzuk meg őket 1-től n-ig. Legyen az ismert súly m. Vegyünk ki az i-edik zsákból $(k+1)^{i-1}$ darab golyót, $1 \leqq i \leqq n$. Ha a golyók mindannyian szabványos súlyúak lennének, akkor az így nyertek összsúlya

$$S = m\cdot 1+m\cdot(k+1)+m\cdot(k+1)^2+\ldots+m\cdot(k+1)^{n-1}.$$

Mivel vannak m-nél könnyebb golyók, ezért a mért súly az S-nél kisebb $\bar{S}$. Ha az i-edik zsákban m_i pond súlyú golyók vannak, akkor

$$\bar{S} = m_1\cdot 1+m_2(k+1)+m_3(k+1)^2+\ldots+m_n(k+1)^{n-1}.$$

Képezzük az $S-\bar{S}=\Delta$ különbséget:

$$(1) \qquad \Delta = (m-m_1)\cdot 1+(m-m_2)(k+1)+(m-m_3)(k+1)^2+\ldots+(m-m_n)(k+1)^{n-1}.$$

Mivel Δ pozitív egész, ezért az (1) felbontás egyértelmű, hiszen $0 \leqq m-m_i < k+1$. A mérési eredményből, a kivett golyók számából kiszámítjuk tehát Δ-t, majd $(k+1)$-gyel való sorozatos osztással (euklideszi algoritmus) meghatározzuk minden $m-m_i$ együtthatót, amely az i-edik zsákban levő golyók súlyának a szabványtól való eltérését megadja.

Ha a $k=1$, úgy $m-m_i \in \{0, 1\}$ és az eredeti feladatot, illetve annak megoldását nyerjük.

Sallai István, Zilah
Szenkovits Ferenc, Székelyudvarhely

A megoldók száma: 29.

1153. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$2^x = 1+x+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+\frac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{n!},$$

ahol n adott természetes szám!

Dályai Pál, Marosvásárhely

Megoldás: Az f: $(-1, +\infty)\to\mathbf{R}$, $f(t)=(1+t)^x$ függvény akárhányszor deriválható, ezért alkalmazható rá Taylor tétele, vagyis tetszőleges $t\in(-1, +\infty)\setminus\{0\}$ esetén létezik oly θ_t valós szám a 0 és t között úgy, hogy

$$f(t)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}t+\frac{f''(0)}{2!}t^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta_t)}{(n+1)!}t^{n+1},$$

azaz

$$(1+t)^x=1+\frac{x}{1!}t+\frac{x(x-1)}{2!}t^2+\ldots+\frac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{n!}t^n+$$

$$+\frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{(n+1)!}(1+\theta_t)^{x-n-1}\cdot t^{n+1}$$

teljesül. Ha $t=1$ helyettesítéssel élünk, és θ_1 helyett csak θ-t írunk, kapjuk:

$$2^x=1+x+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}+\frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{(n+1)!}(1+\theta)^{x-n-1},$$

ahol $\theta\in(0, 1)$.

Ezt figyelembe véve feladatbeli egyenletünk egyenértékű az

$$\frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{(n+1)!}(1+\theta)^{x-n-1}=0$$

egyenlettel. Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$x(x-1)\ldots(x-n)=0,$$

ha tehát

$$x\in\{0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

Dályay Pál, Marosvásárhely

Megjegyzés: A feladat többféleképpen is általánosítható:

1. Legyen A természetes szám. Oldjuk meg az

$$(1+A)^x=\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}A^k$$

egyenletet!

2. Legyen $|a|<1$. Oldjuk meg az

$$(1+a)^x=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{x}{k}a^k$$

egyenletet!

Mindkét egyenletet a fent látott módon oldhatjuk meg.

Bencze Mihály, Brassó

A megoldók száma: 20.

1154. Mutassuk meg, hogy bármely öt különböző valós szám közül kiválasztható kettő, a és b úgy, hogy az

$$\frac{1+ab}{a-b}>1 \quad \text{fennálljon!}$$

Cseh László, Székelyudvarhely

I. megoldás: A ctg: $(0;\pi)\to\mathbf{R}$, $x\to\operatorname{ctg}x$ függvény bijektív, ezért léteznek a $(0;\pi)$-ben olyan α_1, α_2, α_3, α_4 és α_5 értékek, hogy az adott öt valós szám a $\operatorname{ctg}\alpha_1$, $\operatorname{ctg}\alpha_2$, $\operatorname{ctg}\alpha_3$, $\operatorname{ctg}\alpha_4$ és a $\operatorname{ctg}\alpha_5$ legyen. Mivel

$$(0;\pi)=\left(0;\frac{\pi}{4}\right]\cup\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left(\frac{3\pi}{4};\pi\right),$$

ezért az öt α_i között van kettő, amelyik ugyanabba az intervallumba tartozik, azaz különbségük $\frac{\pi}{4}$-nél kisebb. Feltehető tehát, hogy $\alpha_2-\alpha_1<\frac{\pi}{4}$. A $\operatorname{ctg}x$ szigorúan csökkenő függvény a $(0;\pi)$ számközön, így

$$\operatorname{ctg}(\alpha_2-\alpha_1)>\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1,$$

azaz

$$\frac{1+\operatorname{ctg}\alpha_1\cdot\operatorname{ctg}\alpha_2}{\operatorname{cgt}\alpha_1-\operatorname{ctg}\alpha_2}>1,$$

és ezt kellett igazolnunk.

Merényi Imre, Börvely, Petkes Gergely, Nagykároly Szántó Tamás, Szeged

II. megoldás: Az öt valós szám között van három azonos előjelű (a 0-t is ideértve). Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy ezek nem negatívok, hiszen az $1+ab$ kifejezés értéke $a\leqq 0$ és $b\leqq 0$ esetén $1+|a|\cdot|b|$-vel egyenlő, a nevezőben pedig $|b-a|$-kel számolhatunk. Legyen tehát a három nem negatív valós szám a, b és c, növekvő sorrendben:

$$0\leqq c<b<a.$$

Ha most $b<1$, akkor

$$\frac{1+bc}{b-c}\geqq\frac{1+bc}{b}>1+bc\geqq 1,$$

ha pedig $b\geqq 1$, akkor

$$\frac{1+ab}{a-b}>\frac{1+ab}{a}\geqq\frac{1+a}{a}>1,$$

és ezt kellett igazolnunk.

Csúri József, Szeged

A megoldók száma: 20.

A megoldók névsora (1149—1154.)

Bagi Gábor, Barcs (1149., 1150., 1153.); Bencze Mihály, Brassó (1149. 3 mód, 1150. 2 mód, 1151., 1152., 1153. 2 mód, 1154.); Bigus Imre, Sárospatak (1149—1154.); Bokros Szilárd, Letenye (1149—1152., 1154.); Cseh László, Székelyudvarhely (1149., 1150., 1152., 1153. 2 mód, 1154.); Csorba Ferenc, Győr (1149—1152.); Csúri József, Szeged (1149—1152., 1154.); Dályay Pál, Marosvásárhely (1149. 2 mód, 1150. 2 mód, 1151—1154.); Hajdu Ferenc, Nagykálló (1152—1154.); Hajna János, Pécs (1149—1151., 1154.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1149—1154.); Jancsó György, Miskolc (1150., 1153); Kamarás Lajos, Pécs (1149—1154.); Kiss Géza, Kisújszállás (1149—1152., 1154.); Kosztolányi József, Szeged (1149—1152.); Kovács Gábor, Komárom (1152.); ifj. Kováts Péter, Budapest (1149—1151.); Merényi Imre, Börvely (1149., 1150., 1152—1154.); Mészáros József, Galánta (1149., 1150.); Nyírő József, Mezőkövesd (1150., 1152., 1153.); Petkes Gergely, Nagykároly (1149—1154.); Róka Sándor, Nyíregyháza (1149., 1152.); Sallai István, Zilah (1150—1153.); Schandl Gábor, Zalaegerszeg (1150.); Schutzbach Mártonné, Siófok (1150., 1152.); Sebestyén László, Budapest (1153.); Simon József, Csíkszereda (1150—1152.); Solymár Zoltán, Kalocsa (1149—1151., 1153.); Steierlein István, Balatonfüred (1149., 1152—1154.); Sütkeő Cecília, Szombathely (1152., 1154.); Szántó Tamás, Szeged (1149., 1152., 1154.); Szász Róbert, Kőhalom (1149—1154.); Szenkovits Ferenc, Székelyudvarhely (1149—1154.); Tóth György, Szolnok (1150.); Varga István, Nagyszalonta (1149., 1150., 1152. 2 mód, 1154.); Zalán Péterné, Budapest (1149., 1150., 1152., 1153.); Zsidó-Nagy György, Kolozsvár (1149—1152., 1154.).

Könyvismertetés

Dr. Szikszai József: A hatványközepek. Szakköri füzet. R. sz.: 29 287.

A szakköri füzetek elsősorban az érdeklődő tanulóknak szólnak, az iskolai szakkörök munkáját hivatottak segíteni. Eközben persze hozzájárulnak a matematikatanárok matematikai kultúrájának fejlesztéséhez, segítik őket a szakköri feladatanyag összeállításában, ötleteket adnak a versenyekre való felkészítéshez.

Dr. Szikszai szakköri füzete kiválóan felel meg ennek a sokrétű kívánalomnak. Egyszerű geometriai modellen vezeti be a két változós középértékeket, vizsgálja a közöttük érvényes egyenlőtlenségeket, ötletes geometriai, számelméleti, trigonometriai alkalmazásokat javasol. Az n változóra kibővített középértékek vizsgálatát szép diophantikus egyenletek köve-

tik. Fokozatos előrehaladásában a következő lépés a négyzetes és köbös középérték vizsgálata két változóra. Négy bizonyítás közül is válogathat az olvasó: egyszerű geometriai eljárástól a messzebb mutató függvény elemzésig. A további fejezetek már egyre jobban építenek a határérték és a deriváltak fogalmának ismeretére: általánosítás 2 pozitív szám egész kitevőjű, majd valós kitevőjű hatványközepeire, n pozitív szám valós kitevőjű hatványközepeire, illetve súlyozott hatványközepeire.

A fejezeteket kitűzött feladatok zárják, amelyeknek gyakran több megoldását is közli a szerző. A feladatokat igyekezett a középiskolai matematika szinte minden területéről összegyűjteni, a megoldási módszerek ajánlásában ügyesen tér ki egyéb kiegészítő ismeretek (törzsszámok előfordulása, Pell-egyenletek, pithagoraszi számhármasok stb.) bemutatására.

A füzet egyéni tanulásra is alkalmas, de figyelmébe ajánlható bármely legalább második osztályos tanulókból álló iskolai szakkörnek, esetleg több éves feldolgozásra is. A szerző jó pedagógiai érzékkel vezeti a fogalmak kialakítását fokozatos absztrakciókon keresztül az analízisnek az elemi matematikán már túlnyúló területei felé.

Láng Hugó

Új könyvek

I.

ÁBRAHÁM ISTVÁN—BEDŐ LÁSZLÓ—CZÉTÉNYI CSABA—IFJ. FRIGYESI MIKLÓS—JUHÁSZ ATTILA—KORÁNYI ERZSÉBET: *Matematika a felvételi vizsgára készülők részére* (3. kiadás), Budapest, 1987. Tankönyvkiadó, 584 oldal, 51 Ft.

BEDŐ LÁSZLÓ: *Függvények általános és középiskolai tanulók számára* (3. kiadás), Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 238 oldal, 25 Ft.

BÖRÖCZKY, K.—FEJES TÓTH, G. (editors): *Intuitive geometry,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 48, Budapest—Amsterdam—Oxford—New York, 1987, János Bolyai Mathematical Society, and North-Holland Publ. Co. 708. oldal, 980 Ft.

DENKINGER GÉZA: *Analizis* (3. kiadás), Egyetemi tankönyv, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 414 oldal, 46 Ft.

DENKINGER GÉZA—GYURKÓ LAJOS: *Analizis, Gyakorlatok,* Egyetemi segédkönyv, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 373 oldal, 43 Ft.

KOLLER LÁSZLÓNÉ—MOHAROS SÁNDORNÉ: *Matematika, fizika,* Tanári segédanyag a fenőtt szakmunkásképzés tanárai számára, Budapest, 1986, OPI, 89 oldal, ár nélkül.

LENGYEL TAMÁS: *A cluster-analizis néhány kombinatorikai és valószínűségszámítási problémája,* Budapest, 1987, SZTAKI, 17 oldal, ár nélkül.

NAGY BARNABÁS: *Az axonometria felfedezése, Térgeometria gyerekeknek,* Utazások matematikaországban, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 80 oldal, 40 Ft.

NAGY FERENC—NAGY DÉNES: (szerk.): *Magyarok a természettudomány és technika történetében,* Életrajzi lexikon A—Z-ig és dokumentumok, Első gyűjtés, Budapest, 1986, OMIKK, 450 oldal, 160 Ft.

PÁCZELT ISTVÁN—SCHARLE PÉTER: *A végeselem-módszer a kontinuummechanikában,* Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 151 oldal, 38 Ft.

PELLER JÓZSEF: *Exponenciális és logaritmusfüggvény, Differenciálszámítás,* Kísérlettel megalapozott didaktikai megoldásrendszer, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 280 oldal, 38 Ft.

RADNAI GYULÁNÉ SZENDREI JULIANNA: *A játék matematikája* (4. kiadás), Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 136 oldal, 15 Ft.

RENNER GÁBOR: *Kör approximációja a számítógépes geometriai tervezésben,* Budapest, 1986, SZTAKI, 63 oldal, ár nélkül.

SAIN MÁRTON: *Matematikatörténeti ABC,* Adatok, tények, érdekességek a matematika középfokú tanításához és tanulásához (5. átdolgozott és bővített kiadás), Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 327 oldal, 65 Ft.

TAKÁCS JÓZSEF: *Segédanyag a gimnáziumok 2. osztályában folyó szabadsávos matematika tanításához,* Veszprém, 1987, Megyei Pedagógiai Intézet, 25 oldal, ár nélkül.

Természettudományi kisenciklopédia (3. kiadás), Budapest, 1987, Gondolat Könyvkiadó, 980 oldal + 80 tábla, 250 Ft.

TILLAINÉ BUVÁRI ANIKÓ: *Topológia és gráfelméleti érdekességek,* Középiskolai szakköri füzetek, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 147 oldal, 24 Ft.

ÚJVÁRI ISTVÁN: *Egyedül készülök a felvételire! Összefoglaló matematikából,* Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 380 oldal, 56 Ft.

VALKÓ PÉTER—VAJDA SÁNDOR: *Műszaki-tudományos feladatok megoldása személyi számítógéppel,* Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 342 oldal, 90 Ft.

VINCENT ALAN: *Molekuláris szimmetria és csoportelmélet,* Programozott bevezetés a kémiai alkalmazásokba, Egyetemi segédkönyv, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 183 oldal, 16 Ft.

II.

ARNOLD, V. I.: *Katasztrófaelmélet,* Középiskolai szakköri füzetek, Budapest, 1987. Tankönyvkiadó, 89. oldal, 18 Ft.

ARNOLD, V. I.: *Közönséges differenciálegyenletek,* Budapest, 1987., Műszaki Könyvkiadó, 284 oldal, 87 Ft.

CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER: *Útmutató az általános iskolai matematika tananyagának korrekciójához, 1—4. osztály,* Budapest, 1986. OPI, 62 oldal, ár nélkül.

DÖMÖTÖR FERENC—HUSZTHY LÁSZLÓ—VINCZE ENDRE: *Valószínűségszámítási példatár* (5. kiadás), Miskolc, 1986, Nehézipari Műszaki Egyetem, 33 oldal, ár nélkül.

ERDÉLYI ZOLTÁN: *Szállítási és korlátozott szállítási feladat megoldása magyar módszerrel,* Miskolc, 1986, Nehézipari Műszaki Egyetem, 106 oldal, ár nélkül.

FOMENKO, A. T.—FUCHS, D. B.—GUTENMACHER, V. L.: *Homotopic Topology,* Budapest, 1986, Akadémiai Kiadó, 310 oldal, 430 Ft.

GÁLL ÉVA: *Vigyázat! Csak gyerekeknek* (5. kiadás), Utazások matematikaországban, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 115 oldal, 32 Ft.

GÁSPÁR LÁSZLÓ—TEMESI JÓZSEF: *Lineáris programozási gyakorlatok,* Egyetemi segédkönyv, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 547 oldal, 67 Ft.

GOLDSTINE, HERMAN H.: *A számítógép Pascaltól Neumannig,* Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 368 oldal, 110 Ft.

HVORECKÝ, J.—KELEMEN, J.: *Ötlettől az algoritmusig,* Középiskolai szakköri füzetek, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 181 oldal, 30 Ft.

KÖRMENDY LÁSZLÓ: *Bevezetés a matematikai statisztikába,* Budapest, 1986, BME Mérnöki Továbbképző Intézete, 106 oldal, 75 Ft.

NAGY FERENC (összeállította): *Neumann János és a „magyar titok" a dokumentumok tükrében,* Budapest, 1987, OMIKK, 240 oldal, 114 Ft.

PÁCZELT ISTVÁN—HERDAI BÉLA: *A végeselem-módszer alkalmazása rúdszerkezetekre,* Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 150 oldal, 45 Ft.

PÁLFY SÁNDOR: *Törheted a fejed!* Matematikai versenyfeladatok és fejtörők a Kis Matematikusok Baráti Köre részére, (Utánnyomás), Budapest, 1986, TIT, 155 oldal, 16 Ft.

POGÁTS FERENC—VARGA KATALIN: *Kis Matematikusok Baráti Köre, Munkafüzet,* Budapest, 1986, TIT, 31 oldal, 9 Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR: *Egyetemi felvételi feladatok matematikából 1983—1985,* VII. kötet, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 288 oldal, 43 Ft.

SZEVASZTYANOV, B. A.—CSISZTYANOV, V. P.—ZUBKOV, A. M.: *Valószínűségelméleti feladatok,* Egyetemi segédkönyv, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 354 oldal, 24 Ft.

SZIKSZAI JÓZSEF: *A hatványközepek,* Középiskolai szakköri füzetek, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 85 oldal, 14 Ft.

TÁTÁR ISTVÁN: *Feladatok az úttörő-matematikusok vetélkedőin,* Általános és középiskolai tanulók számára, Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 274 oldal, 39 Ft.

ÚJVÁRI ISTVÁN: *Felkészülés és felzárkózás matematikából az általános és középiskolai tanulók számára* (4. kiadás), Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 158 oldal, 23 Ft.

VÁRLAKI PÉTER: *Bevezetés a statisztikai rendszer-identifikációba,* Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 290 oldal, 50 Ft.

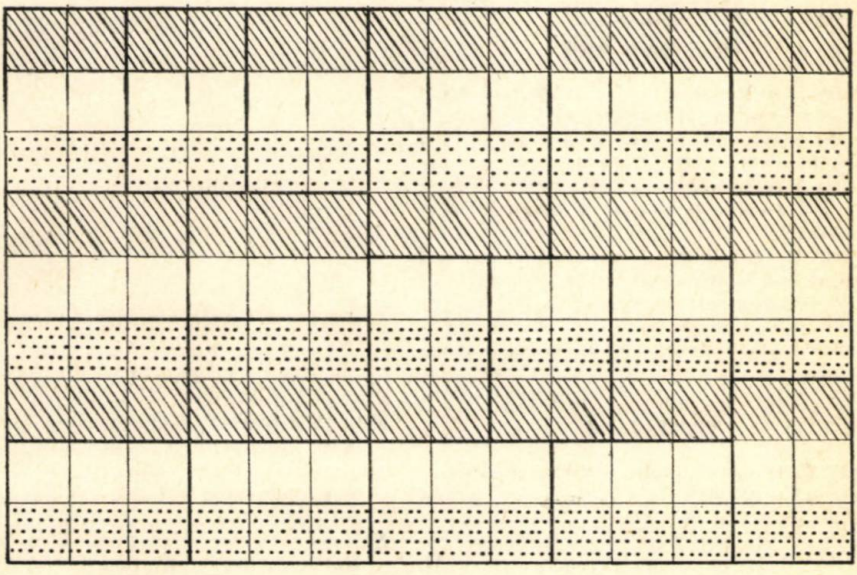
Dr. Scharnityky Viktor

Ára: 7,— Ft

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata

VERSECZY KÖNYVTÁR SZOLNOK



1987. július * XXXIV. évfolyam 2 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

87-749 — Szegedi Nyomda— F.v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely hírlapkézbesítő postahivatalnál, a Posta hírlapüzleteiben és a Hírlapelőfizetési és Lapellátási Irodánál (HELIR) Budapest, V., József nádor tér 1. 1900 közvetlenül, vagy postautalványon, valamint átutalással a HELIR 215-96162 pénzforgalmi jelzőszámra. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
a) személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését, *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal (nyugdíjasok törzsszámukat).

TARTALOM

Percsi Olga: Differenciált oktatás, „differenciált értékelés" 33
Dr. Ambrus András: Matematikatanítási irányzatok Kárteszi professzor kommentárjaival II. 37
Schuster Gyula: Gondolatok az implikáció tanításáról 42
Skanderáné dr. Apor Mária: A térszemlélet fejlesztésének lehetőségei a középiskolában 46
Ujvári István: Matematikai tömegversenyek tapasztalatai 55
Fitos László: Parabolába írt sokszögek területével kapcsolatos érdekességek ... 58
FELADATOK 60

СОДЕРЖАНИЕ

Перчи Ольга: Дифференцированное обучение, »дифференцированная оценка«.. 33
Д—Р Амбруш Андраш: Направления преподавания математики с комментариями профессора Картеси, II..... 37
Шустер Дьюла: Размышления по обучении импликации..... 42
Шкандеранэ д—р Апор Мария: Возможности развития пространственного воображения в средней школе..... 46
Уйвари Иштван: Опыт массовых соревнований по математике..... 55
Фитош Ласло: Примечательности площади подпарабольных многоугольников 58
ЗАДАЧИ 60

INHALT

Frl. Olga Percsi: Differenzierter Unterricht, „differenzierte Bewertung" 33
Dr. Ambrus András: Tendenzen des Mathematikunterrichts mit den Kommentaren des Herrn Prof. Dr. Kárteszi II. 37
Schuster, Gyula: Gedanken über den Unterricht der Implikation 42
Frau Dr. Mária Skandera (geb.: *Apor):* Die Möglichkeiten der Entwicklung der Raumanschauung in der Mittelschule .. 46
Ujvári, István: Erfahrungen von mathematischen Massenwettbewerben 55
Fitos, László: Merkwürdigkeiten im Zusammenhang mit dem Flächeninhalt von Vielecken, die in einer Parabel eingeschrieben sind 58
AUFGABEN 60

PERCSI OLGA
általános iskolai tanár
Eötvös József Általános Iskola, Ercsi

Differenciált oktatás, „differenciált értékelés"

A kor követelményeinek differenciált tanítással tudunk eleget tenni. A differenciált tanítási-tanulási módszerek igénylik a változatosabb, a hozzájuk jobban alkalmazkodó ellenőrzési és értékelési eljárások alkalmazását.

Az alábbiakban egy ilyen lehetséges írásbeli ellenőrzési és értékelési eljárás anyagát és tapasztalatait adom közre, amelyet ötödik osztályokban végeztünk iskolánkban. Az évi anyag feldolgozásával az OPI által 1985-ben kiadott tanmenet-javaslat alapján haladtunk. (A tanmenet-javaslat megjelent A matematika tanítása 1985/6. számában.) Az évfolyamban mind a négy témazáró íratását az alábbiakban közölt módon végeztük. Itt a 3. és 4. témazáró feladatai szerepelnek, amelyet a tanmenet-javaslat alapján a 84. órában és a 117. órában írattunk meg.

3. témazáró

1. *a)* Rajzolj egy 16 cm hosszú szakaszt! Rajzold meg színessel az $\frac{1}{4}$ részének a felét! Hány centiméter ez? A szakasz hányad része ez?

(3 pont)

b) Rajzolj egy 6 cm oldalú négyzetet! Jelöld színessel az $\frac{1}{4}$ részének a $\frac{2}{3}$ részét! A négyzet hányad része ez?

(5 pont)

c) Rajzolj egy téglalapot és színessel jelöld meg az $\frac{5}{4}$ részének a $\frac{2}{3}$ részét! Az eredeti téglalap hányad része ez?

(6 pont)

2. *a)* Végezd el a műveleteket, majd a kapott eredményeket írd fel növekvő sorba!

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}= \quad \frac{2}{5}-\frac{3}{4}= \quad \frac{3}{5}\cdot 4= \quad \frac{4}{9}:2= \quad \frac{5}{3}:3=$$

(5,5 pont)

b) Végezd el a műveleteket, majd a kapott eredményeket írd fel növekvő sorba és ábrázold számegyenesen!

$$\frac{4}{6}+\frac{1}{3}= \quad \frac{1}{4}-\frac{2}{3}= \quad \frac{1}{3}\cdot 2= \quad \frac{10}{6}:5= \quad \frac{11}{4}:3=$$

(7 pont)

c) Oldd meg a nyitott mondatokat, majd a kapott megoldásokat írd fel csökkenő sorba és ábrázold számegyenesen!

$$\square + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \quad 2 - \square = \frac{24}{16}, \quad \square : 4 = \frac{3}{8}, \quad 3 \cdot \square = \frac{9}{4}, \quad \square \cdot 6 = -3.$$

(9 pont)

3. *a)* Zolinak 45 szem cseresznyéje van. $\frac{2}{3}$ részét a testvéreinek adta. A cseresznye hányad része maradt neki? Hány szem ez?

(3 pont)

b) Egy futóversenyen az első $\frac{1}{2}$ óra alatt, az utolsó $\frac{4}{5}$ óra alatt ért célba. Hány órával hamarabb ért be az első, mint az utolsó. Hány perc ez?

(5 pont)

c) A kisdobosok 6 km-es túrát terveztek. Délelőtt megtették az út $\frac{1}{3}$ részét, majd pihenés után az $\frac{1}{4}$ részét. Az út hányad részét kell megtenniük délután? Ez hány kilométer?

(6 pont)

4. *a)* Rajzolj egy hegyesszöget és mérd meg! Rajzolj egy 125°-os szöget is!

(3 pont)

b) Rajzolj háromszöget, mérd meg a szögeit! Add össze a mérés eredményét!

(4 pont)

c) Rajzolj olyan négyszöget, melynek egyik szöge derékszög és egy másik szöge 115°! Mérd le a másik két szögét is, és add össze a négy szögét!

(5 pont)

Értékelés: jeles 24—26 pont,
jó 19,5—23,5 pont,
közepes 13—19 pont,
elégséges 8—12,5 pont,
elégtelen 0—7,5 pont.

4. témazáró

1. *a)* Írd a következő tört alakú számokat tizedes tört alakba, majd írd fel azokat növekvő sorrendbe!

$$\frac{4}{10}; \quad \frac{-4}{5}; \quad \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{4}; \quad \frac{40}{100}; \quad \frac{1}{3}.$$

(4 pont)

b) Írd a következő tört alakú számokat tizedes tört alakba, majd írd fel azokat csökkenő sorrendbe!

$$\frac{3}{6}; \quad \frac{9}{15}; \quad \frac{-3}{4}; \quad \frac{203}{10}; \quad \frac{-150}{200}; \quad \frac{2}{3}.$$

(5,5 pont)

c) Írd a következő tört alakú számokat tizedes tört alakba, majd írd fel azokat csökkenő sorrendbe és ábrázold számegyenesen!

$$\frac{6}{12};\quad -\left(\frac{1}{4}\right);\quad \frac{12}{15};\quad \frac{200}{1000};\quad \frac{160}{200};\quad -\left(\frac{12}{16}\right).$$ (6,5 pont)

2. *a)* Alakítsd át a megfelelő mértékegységre:
3,24 m = ... cm; 4,5 dl = ...l;
1,2 m^2 = ... dm^2; 136 dkg = ...kg. (3 pont)

b) Alakítsd át a megfelelő mértékegységre!
13,26 kg = ...g; 19 ml = ...l;
1,2 km = ... dm; 312 cm^2 = ... dm^2. (3 pont)

c) Alakítsd át a megfelelő mértékegységre:
0,065 ha = ... m^2; 1,05 hl = 1050.....;
0,3 nap = ... óra; 35 cm^3 = ... dm^3.
(6 pont)

3. *a)* Katinak 80 Ft-ja van. Hány forintot költ el és hány forintja marad, ha 21 Ft 80 fillérért könyvet és 34,50 Ft-ért egy tollat vásárol? Írj megoldási tervet is!
(3,5 pont)

b) Gábor 125 Ft-tal megy vásárolni a boltba. Vesz három üveg üdítőt üvegenként 6,80 Ft-ért és egy doboz süteményt 36 Ft 20 fillérért. Hány forintot költ el és hány forintja marad? Írj megoldási tervet is!
(4,5 pont)

c) A tejeskocsi összesen 4,5 hl tejet visz négy üzletbe. Az elsőbe 0,8 hl-t visz, a másodikba kétszer annyit. A harmadikba és a negyedikbe a maradékot viszi, amelyet egyenlően oszt szét a két üzlet között. Hány hektoliter tej jut külön-külön a harmadik és negyedik üzletbe?
(5,5 pont)

4. *a)* 64 kg gyümölcs ára 1683,20 Ft. Hány forintba kerül egy kg gyümölcs?
(3 pont)

b) Egy téglalap területe 522,2 cm^2. Egyik oldala 28 cm. Mekkora a másik oldala? Írd fel nyitott mondattal is!
(4,5 pont)

c) A napközi gondnoka 1360 Ft-ért vásárolhat vásznat asztalterítőnek. Két fajtából választhat. Egyiknek 32 Ft métere, a másiké 25 Ft. Melyikből vásárolhat többet és hány méterrel, ha az összes pénzért terítőt kell venni? Írj megoldási tervet is! (5,5 pont)

5. *a)* Adott a síkban egymástól 4,2 cm-re A és B pont. Rajzold meg a síkban azokat a pontokat, amelyek az A és a B ponttól egyenlő távolságra vannak. Hány ilyen pont van?
(3 pont)

b) Adott a síkban egymástól 4,6 cm-re A és B pont. Keresd meg a síkban azokat a pontokat, amelyek A ponttól 3,1 cm-re és a B ponttól pedig 4 cm-re vannak. Hány ilyen pont van? Hány centiméterre kell elhelyezni a két pontot, hogy egy megoldás legyen, és hány centiméterre, hogy ne legyen megoldás?
(4,5 pont)

c) Adott a síkban egy *e* egyenes és tőle 4 cm-re egy *P* pont. Keresd meg a síkban azokat a pontokat, amelyek az *e* egyenestől 3 cm-re, a *P* ponttól pedig 3,5 cm-re vannak! Hány ilyen pont van? Hány centiméterre kell elhelyezni a pontot az egyenestől, hogy egy megoldás legyen, és hány centiméterre, hogy ne legyen megoldás?

(5,5 pont)

Értékelés:	jeles	27—29 pont,
	jó	22—26 pont,
	közepes	15—21 pont,
	elégséges	9—14 pont,
	elégtelen	0— 8 pont.

A fentiekben látható, hogy minden mérendő egység három fokozatban található. (A feladatok legtöbbször mélységükben különböznek egymástól.) Az *a* feladatok a legegyszerűbbek, a *c* feladatok pedig a legmélyebben kívánják az ismereteket, illetve azok alkalmazását. A tanulóknak az *a), b)* és *c)* feladatok közül egyet-egyet kellett választaniuk, tetszés szerint. Így lehetséges, hogy az egyikből az *a)*-t, a másikból a *b)*-t, a harmadikból pedig a *c)*-t stb. választották. Ennek megfelelően kapták a pontokat. Ha nem sikerült teljesen megoldani a feladatot, akkor a részfeladatért is pontot kaphattak ugyanúgy, mint a hagyományos felmérő dolgozatoknál. A feladatok pontozásánál ügyelnünk kellett a fokozatok arányos pontozására, de arra is, hogy a különböző mérendő részek pontozása is arányos legyen azok súlyának megfelelően. Ezek figyelembe vétele alapján alakult ki, hogy az összes *a)* feladat pontszámával közepes, az összes *b)* feladat pontszámával jó és az összes *c)* feladat pontszámával jeles osztályzatot lehetett elérni. Az azonban ritkábban fordult elő, hogy egy tanuló mindig ugyanazt a fokozatú feladatot készítette el (általában ez a leggyengébbeknél és a jóknál volt tapasztalható).

Aggályok merülhetnek fel a gyerekek elé táruló példatömeggel kapcsolatban. Tapasztalataink alapján nem volt olyan tanuló, aki nem készített el minden feladatot. Tehát az általában gyengébb olvasási készségük ellenére is volt elég idejük arra, hogy végigolvassák a feladatokat, válasszanak és megoldják azokat. Természetesen számít, hogy milyen formában és mennyire jól olvashatóan kapják kézhez tanulóink a feladatokat. A legszebb kézírást is nehezebben, lassabban olvassák, mint a géppel írott szöveget. Ebben az esetben az írásvetítő sem alkalmazható, mivel nagyobb menynyiségű feladatról van szó, s ennyi egyszerre nem látható kivetítve. Ezeknél a felméréseknél is megengedtem, hogy tetszés szerint, bármelyik sorszámú feladattal kezdhetik munkájukat. Ha végeztek a feladatokkal, átnézték, ha maradt idejük, akkor egy-egy nehezebb fokozattal is foglalkozhattak. Ha ez sikerrel járt, akkor természetesen a nehezebb fokozatú példa pontszámát kapták és az előző érvénytelen lett. Ha csak bizonyos részével lettek kész a nehezebb fokozatnak, akkor a két feladat közül annak a pontszámát kapták, ami számukra kedvezőbb volt.

Sokkal több munkának tűnhet a felmérésnek ez a módja. Több is! A fáradságot azonban megéri. Nagyon kedvelik a tanulók. Szeretnek választani. Fejleszthetjük önértékelésüket. A gyengébb tanulók önbizalmát fokozza, hogy egyszerűbb feladatokkal kell, lehet megbirkózniuk. Ez az érdemjegyeiken is meglátszott (pozitív vonatkozásban). A jobbakat sarkallja, hogy még alaposabban sajátítsanak el egy-egy anyagrészt .Differenciáltabb képet kapunk a tanulók tudásáról. Jobban feltárul előttünk a ta-

nulók tudásának szintje, s egyben a kitűzött célok is jobban egyénre szabottabbak.

Az ilyen jellegű felmérőkre alaposan fel kell készíteni a tanulókat. Itt nem az anyag elsajátíttatására gondolok, hiszen azt mindig meg kell tennünk. Első hallásra nehezebben érthetik meg a „játékszabályokat". Ha azonban gyakran módot adunk arra, hogy választhassanak képességüknek és tudásuknak megfelelően, akkor a témazáróknál már nem lesznek tanácstalanok. Az ilyen típusú témazáró íratása egyben arra is késztet minket, hogy még gyakrabban éljünk a differenciálás lehetőségével és azon belül is az öndifferenciálással.

DR. AMBRUS ANDRÁS
egyetemi adjunktus
Budapest

Matematikai irányzatok Kárteszi professzor kommentárjaival II.

IV.

Problémamegoldó (heurisztikus) irányzat

Ennek az irányzatnak megalapítója és leghíresebb képviselője Pólya György volt.

A hazai tankönyvek, példatárak feladatai közül sok példát lehetne illusztrációként felhozni. A következő példával csak a problémajelleget akarjuk kihangsúlyozni, a részletes megoldást mellőzzük.

Két egybevágó, *a* oldalú négyzetet úgy helyezünk egymásra, hogy az egyik négyzet valamelyik csúcspontja a másik négyzet középpontjába esik. A négyzetek helyzete különben tetszőlegesen változtatható. Mekkora a két négyzet közös részének területe?

Ha nincs ötletük a tanulóknak, célszerű az egyik négyzetet rögzíteni és csak a másikat forgatni a középpont körül. (Fiatalabb tanulók ezt kivágott négyzetekkel modellezhetik is.) Egy speciális helyzet — a két négyzet megfelelő oldalai párhuzamosak — megfigyelése után keletkezhet a sejtés, hogy a terület állandó, aminek az igazolása háromszögek egybevágóságának megmutatásával történhet.

Az irányzat főbb jellemzői

1. A *problémák megoldása* áll a matamatikatanítás középpontjában. Sok matematikus is a problémák megoldását tartja a matematika lényegének, magvának. (Poincaré, Halmos, Hadamard és mindenekelőtt Pólya György.) Pólya elvei az utóbbi 40 évben jelentősen befolyásolták a matematikai tanterveket és tanárképzést az USA-ban. Személyesen is számos „problémamegoldó szemináriumot" és tanítási órát vezetett. Az egész világon ismertek idevonatkozó művei: A problémamegoldás iskolája; A gondolkodás iskolája; Matematika és valószínűségi következtetések. A nyolcvanas évektől kezdve a problémamegoldás a matematikatanítás fő vonalát képezi az USA-ban.

2. Általános cél a *gondolkodás tanítása, tanulása.* (Lásd Pólya: A gondolkodás iskolája!) Természetes, hogy ez az irányzat vizsgálja a tanulók és a felnőttek gondolkodásmódjait, gondolkodási folyamatait. Így beszélhetünk pszichológiai, de filozófiai kutatásokról is (Lakatos).

3. Fontosnak tartják ennek az irányzatnak a képviselői az ún. *heurisztikus stratégiák tudatosítását, tanulását, tanítását,* amelyek az általános tapasztalatok szerint

fokozatosan fejlesztik a problémamegoldó képességet. Ilyen pl.: megfelelő ábra készítése, általánosítás, specializálás, analógia stb. Hazánkban főleg Pólya stratégiája ismert. (Hogyan oldjunk meg feladatokat?)

4. A genetikus irányzathoz hasonlóan ez az irányzat is főleg a matematika *dinamikus aspektusát* (problémamegoldási folyamat) hangsúlyozza, nemcsak a statikust (megoldás produktuma).

5. A megoldási ötletek inkább a *heurisztikus stratégiákra való* szisztematikus orientálás révén keletkeznek, s nem annyira egy nyitott beszélgetés révén, amely fokozatosan vezet a speciálistól az általános felé. (Lásd Wagenschein példáját!)

6. Az oktatási módszert röviden a „felfedező tanulás" jelszó jellemzi. Ide tartoznak elsősorban a saját tapasztalatok, amelyeket egyéni vagy csoportmunkában szerzett a tanuló az alkalmazott heurisztikus stratégiák fokozatos tudatosítása és megtanulása, illetőleg további alkalmazásuk során.

7. *Háttérbe szorulnak ennél az irányzatnál:*

— a tiszta anyagközlés;
— a matematikai szaknyelv, a precizitás;
— formális-logikai levezetések;
— általános pedagógiai célok.

KOMMENTÁR

PÓLYA pszichológiai műveltsége erősen befolyásolta matematikatanítási elveinek kialakulását. Az általa kidolgozott irányzatot úgy lehet nevezni, hogy „matematikatanítás problémamegoldás útján". Az ő véleménye szerint a matematika tanítása inkább művészet, mint tudomány. Véleményem az, hogy aki tanít, megtanulhatja e művészi tevékenység leglényegesebb elemeit. Talán a legfontosabb benne a tanuló egyéni aktivitásának kibontakoztatása és a matematikai tevékenység mozzanatainak tudatosítása.

A tanuló kérdezve vezető tevékenysége nem „implicit" informálás a tanulói megtorpanások folyamán, hanem annak tudatosítása, hogy mi okozza a fennakadást.

Az iskolai oktatás szempontjából figyelembe kell venni, hogy:

a) ennek az irányzatnak a követése időigényes;
b) nem a tananyagra, hanem az ismeretekre vezető tevékenységekre, a matematikai gondolkodás kifejlesztésére esik a nyomaték;
c) ezért bizonyos követelmények látszólag háttérbe szorulnak.

Kiemelném a tapasztalataim alapján, hogy *a tanulói érdeklődés felkeltése és erősítése a legfontosabb.*

V.

Freudenthal-féle irányzat

A ma is még aktív, világhírű holland matematikadidaktikus méltán érdemel meg külön helyet az irányzatok között. Azon kevés matematikadidaktikusok egyike, akik saját didaktikai koncepciójukat kritikusan tudatossá tették és azt egy tudományra, tanításra, tanulásra és tanításfilozófiára vonatkozó háttérfilozófiába sorolták be.

Normák, jellemzők

1. Kevésbé fontos a matematikai végeredmény, inkább *a tanulási és gondolkodási folyamat a lényeges,* amely segít megmagyarázni a megfigyeléseinket. Freudenthal számára is a matematika *dinamikus* (folyamati) aspektusa fontosabb, mint a statikus. Különösen érdeklődik Freudenthal a tanulási folyamatban bekövetkező „ugrások" iránt, amelyek a megoldások „kritikus helyein" fordulnak elő. Ilyen pl. a háromszög

oldalfelező merőlegeseire vonatkozó tétel bizonyításánál annak a felismerése, hogy az oldalfelező merőlegeseknek kapcsolata van a „pontoktól egyenlő távolságokra" tulajdonsággal.

2. Főleg a geometriai feladatoknál, problémáknál *erősen épít a szemléletes alapokra.* Nem tartja szükségesnek az oktatás alacsonyabb szintjén a precíz indoklásokat. (Például minden esetben kitérni arra, hogy mit értünk két egyenes merőlegességén stb.) Az oldalfelező merőlegesekre vonatkozó tétel alsóbb osztályban történő bizonyításánál pl. indoklás nélkül használják föl azt a tényt, hogy a szakaszfelező merőleges pontjai a szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra helyezkednek el. Az életszerű oktatási szituációkban Freudenthalnál a precizírozások alárendelt szerepet játszanak. Csak a tapasztalatok növekedésével térnek ki egyre jobban a „finomságokra". A tanulók előismereteinek, tapasztalatainak megfelelő „lokális rendezéséről" beszél Freudenthal. Csak fokozatosan finomodhatnak, lehetnek precízebbek az indoklások. Ennek a gondolkodásmódnak az eredete az intuicionista irányzatra vezethető vissza.

3. A feladatok megoldási ötletét nem valamilyen genetikus vagy heurisztikus szabály szerint találják meg. Freudenthal fontosnak tartja a lehetőség szerinti nagy, *szabad alkotóteret* a matematika művelésénél és hisz a *spontán, „ad hoc" módszerekben* a feladatmegoldásoknál.

4. Tanítási módszere: „utólagos felfedezés" vezetés segítségével. (Szókrateszi módszer.) Szerinte ez a legalkalmasabb oktatási mód. Arra kell törekednie a tanárnak, hogy a gondolatmenetet a tanulók lehetőség szerint önállóan tudják megtalálni.

5. Freudenthal saját javaslatait mint a „matematikatanítás filozófiáját" jellemzi. (Mathematik als pädagogische Aufgabe.) Filozófiájában objektív elemek mellett ún. „hit"-elemek is előfordulnak, amelyek nem indokolhatók.

6. Kisebb jelentőségűnek, sőt ritkán elérhetőnek tekinti Freudenthal az „abszolút szigort", a globális rendszert, objektivitást. Ugyancsak kisebb jelentőségű szerinte az állandó „teljesítményelv", a mindenkor mindent számonkérés, ellenőrzés.

7. A didaktikai állítások, kijelentések közül a szakmai jellegűeket logikai-szakmai módszerekkel igazolja, míg a közvetlen tanításra vonatkozó megállapítások — pl. a tanítási folyamatok így és így funkcionálnak — ellenőrzésére a klinikai módszereket (interjú, megfigyelés) tartja megfelelőnek Freudenthal.

KOMMENTÁR

Freudenthaltól idézek: „A matematikát mint késztermékét alkalmazni olyan valami, ami egyre jobban a számológépek feladatává válik, és közben mindig új erők szabadulnak fel a matematika alkotó alkalmazására. Ezeket a képességeket célszerű lesz gyakorlással fejleszteni, és a nevelőnek kezdettől fogva tartózkodnia kell attól, hogy a tanulóban olyan kép alakuljon ki a matematikáról, mintha az csupán valamiféle magasabbrendű szellemek által gyakorolható tevékenység lenne." (Freudenthal: Mi az axiomatika, és milyen értéke van a képzésben? Szemelvénygyűjtemény — Czapáry Endre — Tankönyvkiadó, 1970.) Freudenthal gyakran felhívja a figyelmet arra, hogy az iskola nem leendő matematikusokat nevel. A túlzások veszélyeztetik az átlagos diák értelmes tanulását.

A kezdeti precízkedéssel kapcsolatban: A tanuló tudatát a korai túlzott precízkedés csak megzavarja. Az egyre finomabb precizitás csak türelmes nevelés hatására alakul ki és válik a tanuló gondolkodásának tulajdonságává.

Fontosnak tartja, hogy a felnőtt gondolkodásmódját a tanulóra ráerőszakoló tanítás helyett a saját gondolkodásmódjának tudatosodására, javítására, fejlesztésére neveljünk. Minden ráerőszakolt mozzanat a tanuló részéről mesterkéltnek tűnik és elcsüggeszti.

A matematikai tevékenységek között a matematikai tartalmú nyersanyag matematikai formalizálását tartja a legősibb, legfontosabb nevelő tényezőnek.

VI.

Projekt-, illetve alkalmazásorientált matematikaoktatás

Példa. Münziger: Projektorientierter Mathematikunterricht. Urbau Schwarzenberg 1977.

Téma: Sebességkorlátozás.

Bevezetés. A téma bemutatása. Lineáris és másodfokú összefüggések szemléltetése, kidolgozása munkalapok segítségével. (Egyenesvonalú egyenletes mozgások. Fékút függése a sebességtől stb.)

Diszkusszió a témáról: A „130 km/h" sebességhatár előnyei, hátrányai. Az „aktív biztonságra" vonatkozó vizsgálódások konkrét prospektusok és közlekedési balesetek jegyzőkönyvei alapján.

Alkalmazások. Az előbbi problémákkal kapcsolatban munkalapok segítségével bevezetik a másodfokú egyenletek megoldásának technikájába a tanulókat, s további gyakorló feladatok következnek.

Az irányzat néhány jellemzője

1. A példa alapján is látható, hogy nem a tudományos matematika, hanem a normális átlagtanuló a maga szükségleteivel, igényeivel áll a középpontban. A matematika eszközként szolgál a mindennapi élet, a környezet problémáinak megoldására. (Pl. városi közlekedés szervezése, irányítása, közlekedési lámpák üzemeltetése stb.) A matematikai szaknyelv, szigorúság és rendszer alárendelt jelentőségűek.

2. A *matematika alkalmazása* áll előtérben.

3. Főleg a *csoportmunkát* (projektek) tartják fontosnak ez irányzat képviselői. E munkaforma lehetőséget ad tanulói eszmecserékre, kölcsönös segítségnyújtásra, eredmények összehasonlítására. E tényezők főleg az ún. *szociális tanulást* szolgálják. A tanítás feladata az *egyes tanulóknak a csoport általi támogatása, segítése és nem a kiszűrés, a kiválasztás, a szelekció.*

4. Fontos a más tárgyakkal való együttműködés. *(Tantárgyi integráció.)*

KOMMENTÁR

Általános és középiskolai matematikatanításunk a matematikának a matematikán kívüli alkalmazása területén komoly hiányosságokkal rendelkezik.

Nem szabad elszakadnia a matematikának a valóságtól, így sokkal jobban érdekli a gyereket is; a valódi szituációkkal, problémákkal foglalkozó matematikaoktatás fokozza a tanulók érdeklődését.

Vigyázni kell persze arra is, hogy ne mesterkélt példákat elemezzünk.

Időigényes, de megéri a fáradságot! A fűszerezés szerepét tölti be a matematikatanításban.

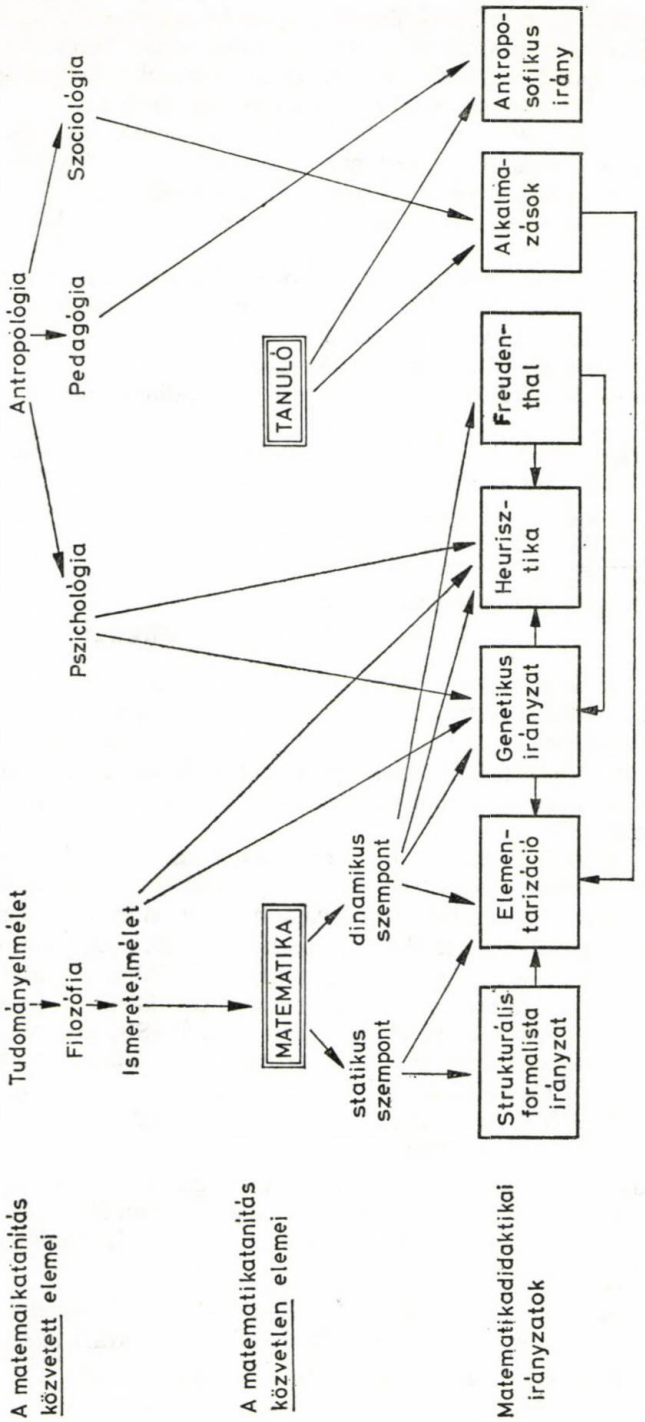
Befejező megjegyzések

Bernd Zimmermann tanulmányában még két irányzatot mutat be. Az egyik az ún. *„anthroposofikus"* irány. Azért nem részletezzük, mert sok hasonlóság van ez irány és a projektorientált irányzat között. A lényegi különbség abban áll, hogy míg a

projektorientált irányzatnál a „kollektivisztikus emberkép" áll a középpontban, az anthroposofikus iránynál az „individuális" emberkép. A tananyagkiválasztás alapvető szempontja az ember, annak szükségletei, érdeke, fejlesztése. Érdekesség, hogy például a geometriának igen fontos szerepet tulajdonítanak, mivel az jó lehetőségeket biztosít a motórikus készségek kifejlesztésére. Nagy súly fektetődik az élethez közeli alkalmazásokra is. A szelekció helyett itt is a támogatáson, fejlesztésen van inkább a hangsúly.

A másik irányzat az ún. *„computerorientált"* irányzat. Természetes, hogy a matematikatanításnak figyelembe kell vennie a gazdaság, technika, irányítás computerizációját, erre fel kell készítenie a tanulókat. A computer jó motiváló hatású a hasznossági, ill. a játék-aspektusok miatt. Alapvető jelentőségű az algoritmikus gondolkodás fejlesztése. Módszere: egy tanuló — egy computer. Ezt az irányzatot azért nem részletezzük, mert a computer használata irányzattól függetlenül helyet kell, hogy kapjon az iskolai matematikaoktatásban.

Befejezésül Zimmermann megjegyzi, hogy fontos lenne olyan, ún.



„metanormák" megalkotása, amelyek segítségével elemezni, osztályozni és összekapcsolni lehetne az egyes matematikadidaktikai irányzatokat. Egy ilyen „metanormarendszernek" a következő szempontokra kellene ügyelnie:

— részletes és indokolt legyen minden norma;
— a matematikaoktatás minél több szempontját vegye figyelembe;
— a tanulókra, a matematikára és a környezetre vonatkozó normák megvilágítása;
— a szituációk specifikumának figyelembevétele.

A matematikadidaktika egy metaelméletének a következő lehetséges konzekvenciáit kellene kutatni:

— Tanulási cél, tanterv-problematika a matematikaoktatásban.
— Teljesítményértékelés a matematikaoktatásban.
— Tankönyvek problémája.
— Oktatás tervezése és szervezése.
— Empirikus kutatások a matematikadidaktikában.
— Tanárképzés.

Végezetül egy ábrán (l. a 41. oldalon!) tesszük szemléletessé a bemutatott irányzatok kapcsolatát.

SCHUSTER GYULA
vezető tanár
Táncsics Mihály Gimnázium, Kaposvár

Gondolatok az implikáció tanításáról

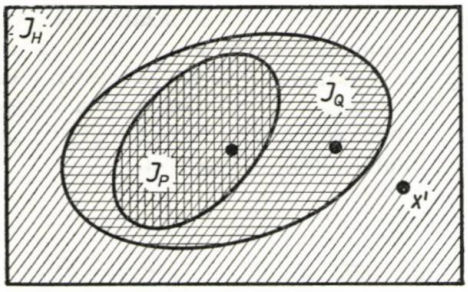
1. Megnyugtató számomra, hogy mások sem tartják olyan természetesnek az „ex falso sequitur quodlibet" kérdését (Urbán János, Ruzsa Imre), hogy azt középiskolában egyszerűen egy megállapodás bejelentésével el lehetne intézni! (Lásd Dr. Andrásfai cikkének egy részét A Matematika Tanítása 1984/5. számában és a B változatú fakultációhoz készített III. osztályos matematikatankönyv 428. oldalát!)

2. Előrebocsátom, hogy az alábbiakkal egyúttal azt is szeretném javasolni, hogy a fakultációs tantervekben ne degradálódjanak kiegészítő anyaggá az implikáció és az ekvivalencia, hisz ezek legalább olyan fontosak pl. az egyenlőtlenségek megoldási lépéseinek megértésében, mint a konjunkció, diszjunkció és a negáció.

3. Egy látszólag nem matematikai, inkább nyelvhasználatinak tűnő problémával szeretnék rátérni most már az implikáció körüli gondokra. Elég sok diák tanul pl. angol nyelvet, és ez előnyt jelent pl. a BASIC-programozási nyelvhez. Hátrányt is okozhat azonban, ha a latin eredetű (Varga Tamás: Matematikai logika I./29. oldal) szónak megfelelő angol (francia, olasz, spanyol) „implication" „magába foglalás" jelentését is ismeri a diák, és ugyanakkor azt hallja matematikaórákon, hogy $P \Rightarrow Q$ jelentése, kimondása „*P implikálja Q*-t!" (B fakt. III/428. oldal.) Gondoljuk el ugyanis, hogy a halmazokat Venn-diagrammok segítségével (már általános iskolás korában) szemléltetni tudó, mai diák hogyan ábrázolja majd a P és Q állításoknak megfelelő J_P és J_Q igazsághalmazokat (adott J_H kiindulási halmazon), ha „*P* magába foglalja *Q*-t?"

4. Természetesen a definíció ismerete a döntő, de mégis furcsán hangzik, és meglepő Venn-diagrammra vezet például a „*ha x* kaposvári, *akkor x* somogyi" (nyilván igaz) implikáció, hisz a kaposváriak J_P igazsághalmaza *„nem foglalja magába"* a somogyiak J_Q igazsághalmazát. Nem volna vajon *célszerű*, akár *egyetlen t-betű áthelyezésével* feloldani ezt az ellentmondást mondván: „*P*-t implikálja *Q*"? Legyen x ember,

x' pont, jelöléssel $H(x)$ állítás$:=x$ magyar ember, $P(x)$ állítás$:=x$ kaposvári ember, $Q(x)$ állítás$:=x$ somogyi ember és $J_H:=\{x' \in J_H | H(x) \mapsto \text{igaz}\}$, $J_P:=\{x' \in J_H | P(x) \mapsto \text{igaz}\}$, $J_Q:=\{x' \in J_H | Q(x) \mapsto \text{igaz}\}$ a megfelelő igazsághalmazok.



P \ Q	i	h
i	i	h
h	i	i

A fenti Venn-diagramm, ahol $J_P \subset J_Q$, már úgy készült, hogy (konkrét tapasztalatokból általánosítva) igaznak fogadtuk el a „Ha P igaz, akkor Q is igaz" összetett állítást. Ezután már az is nyilvánvaló, hogy olyan eset nem létezik, hogy „Ha P igaz, akkor Q nem igaz". A rajzra tekintve az is világos, hogy „ha P nem igaz", akkor már csak két eset lehet: „Q igaz" **vagy** „Q nem igaz". (Ez most kizáró **„vagy"**.) *A $P \Rightarrow Q$ implikáció értéktáblázata tehát már, akár csak a fentiek alapján is elkészíthető, hiszen a Venn-diagrammról világosan látható, hogy a $P \wedge \bar{Q}$ állítás igazsághalmazát diszjunkt halmazok metszete reprezentálja, ezért a tagadása: $\bar{P} \vee Q$ mindig igaz.*

Dr. Andrásfai Béla, általános iskolai logikai készletet alkalmazó okoskodásához hasonlóan, úgy is fogalmazhatnánk, hogy az adott J_H-kiindulási halmazon egy x' elemnek csak 3-féle helyzete lehetséges, és ezek "egyenrangúak" lévén, az implikáció logikai értékét mindhárom esetben igaznak kell tekintenünk, azaz nemcsak $J_P \cap J_Q$-ban található x' pont esetén.

A könnyebb összehasonlítás kedvéért adott állítás tagadását és adott halmaz komplementumát (itt és most) egyformán „föléhúzással" jelölve, tehát a következők állapíthatók meg a Venn-diagramm segítségével: $J_H=(J_P \cap J_Q) \cup (\bar{J}_P \cap J_Q) \cup (\bar{J}_P \cap \bar{J}_Q)$, ha halmazműveletekkel írjuk le; viszont innen a megfelelő logikai műveletekkel: $P \Rightarrow Q=(P \wedge Q) \vee (\bar{P} \wedge Q) \vee (\bar{P} \wedge \bar{Q})=\overline{P \wedge \bar{Q}}=\bar{P} \vee Q$.

5. *Célszerűnek látszik azonban, előbb vagy utóbb, az alkalmazások felől is megközelíteni a $P \Rightarrow Q$ implikáció kérdését, mégpedig abban a formában, hogy egy $P(x)$ egyenlőtlenségből „következik-e" (az ún. „mérlegelv" alkalmazása során kapott) $Q(x)$ egyenlőtlenség?* Különösen sok spontán, téves elképzeléssel találkozhatunk, ha egy $f(x)<g(x)$ egyenlőtlenség két oldalán található kifejezések mindegyikét négyzetre emelik a tanulók. Ezért is érdemes az eredeti és a négyzetreemeléssel kapott $f^2(x)<g^2(x)$ egyenlőtlenség igazsághalmazait, illetve „hamissághalmazait" egyszerű, konkrét példán *is* megvizsgálni.

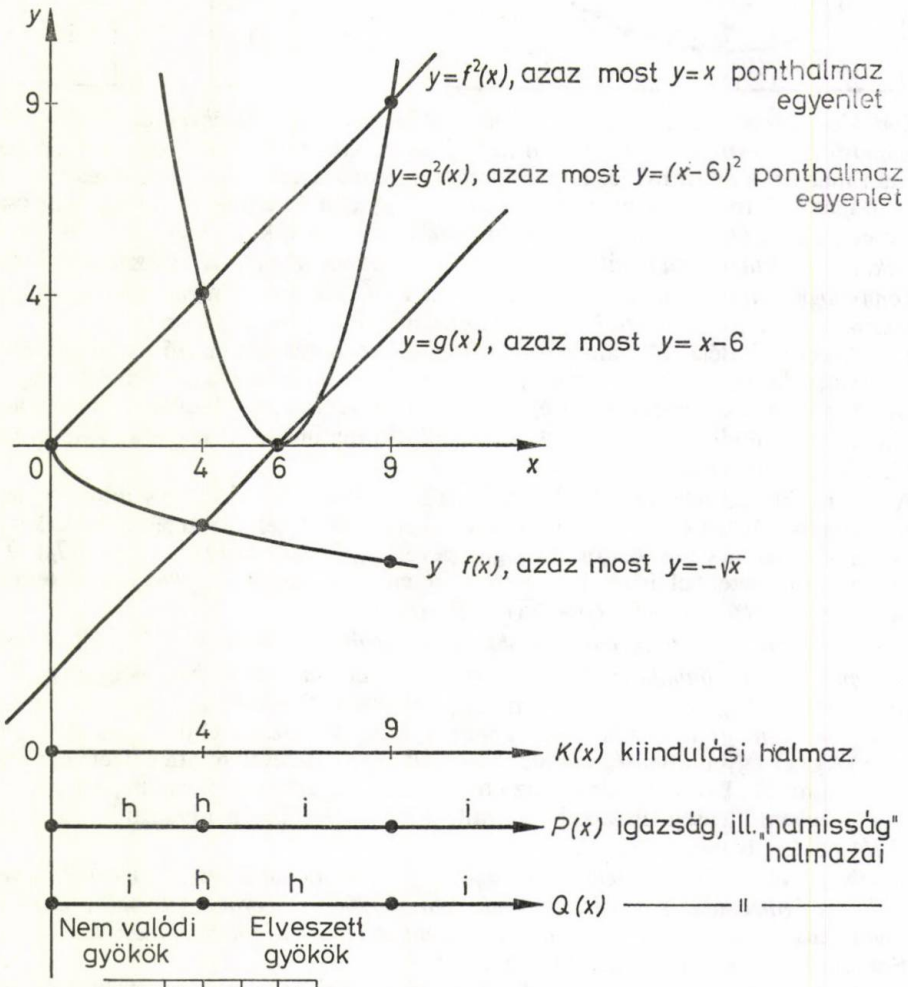
Minthogy feltehetően mindenki elfogadja, hogy csak olyan lépések engedhetők meg egyenlőtlenségmegoldás során is, amelyek nem járnak ún. „gyökvesztéssel", azért ezt a tényt felhasználhatjuk az ekvivalencia és főként az implikáció fogalmának tisztázására is. Ezt szeretném az alábbiakban bemutatni!

Általánosságban is világos, hogy ha $K(x)$ kiindulási halmazon adott $P(x)$ állítás: $f(x)<g(x)$ vagy $(-f(x))<-g(x) \vee (f(x))<(-g(x))$ vagy $(-f(x))<g(x)$ nyitott mondatok bármelyikével van is megadva, *a négyzetreemelésnél ezek „egybeolvadnak"* egyetlen $Q(x)$ állítássá: $f^2(x)<g^2(x)$ egyenlőtlenséggé, *ez azonban a „mérlegelv sérülését" vonja maga után.*

Legyen most $P(x)$ állítás a következő: $-\sqrt{x}<x-6$ és $K:=\{x \in R | x \geqq 0\}$ a szokásos legtágabb kiindulási halmaz (a félegyenest jelöljük az ábrán zölddel!).

Az egyszerűség biztosítja a könnyű grafikus ábrázolást, és ezért a $J_{P(x)}$ igazsághalmaz szemléletes ellenőrzését is (a nyílt félegyenest jelöljük az ábrán pirossal!).

Jelöljük az ábrán például kék színű pontokkal az x tengelyen azokat az $x \in K(x)$ számokat, amelyekre $P(x)$ logikai értéke „hamis"! Hasonlóképpen kék és piros pontokkal jelöljük $Q(x)$ állítás „hamisság" — illetve „igazság" — halmazainak megfelelő pontokat! $Q(x)$ állítás az $x < (x-6)^2$ nyitott mondat. Végül állapítsuk meg (akár egyszerűen a megbízható rajz alapján), hogy az x változó mely értékei esetén tekinthető ekvivalensnek a két egyenlőtlenség, illetve mikor **„következménye"** a második az elsőnek? Ezek után az ekvivalencia és az implikáció értéktáblázata már nem „légből kapott" definíción alapul, és egyúttal alkalmazhatósága is kiderül.



$P(x)$	h	h	i	i
$Q(x)$	i	h	h	i
$P(x) \Rightarrow Q(x)$	i	i	h	i

$P(x)$-ből $Q(x)$ „következik" (azaz az implikáció igaz), amikor nincs gyökvesztés!

6. A fenti előzmények után gyakran maguk a tanulók kérik (és ez nem utolsó motivációs szempont!), hogy beszéljünk arról is, hogyan oldhatunk meg „algebrai úton" is jól egy négyzetgyökös egyenlőtlenséget? (Ilyenek megoldására a felvételi írásbeli vizsgákon már többször volt szükség!) *Általában* $f^2(x)<g^2(x)$ *még csak „nem is következménye" az* $f(x)<g(x)$ *egyenlőtlenségnek.* Annyi azonnal megállapítható, hogy (rövid jelöléssel) $0<g^2-f^2=(g-f)(g+f)$ több részletben vizsgálható csak („mikor pozitív egy szorzat?")!

Célszerű ezért $(f; g)$ *koordinátájú pontokkal szemléltetni a fenti egyenlőtlenségek „igazság-", illetve „hamisság"-halmazainak elemeit,* hisz $0<g-f$ igazsághalmaza $(f; g)$ koordinátarendszerben egyszerűen egy félsík, határoló egyenes nélkül. (Az ábrán ferdén satírozott félsík.) Könnyű meghatározni $f^2<g^2$ igazsághalmazát is, két-két félsík metszetének uniójaként. (Lásd a vízszintes vonalkázást!)

Jól láthatók ezután a **„nem valódi gyökök"** (az implikáció igaz értéke miatt a „hamis gyök" szóhasználat most zavart okozhat!) és az is, hogy melyik síkrészben jelentkezik a **„gyökvesztés"**. Ekvivalencia áll fenn, tulajdonképpen a $0<g+f$ egyenlőtlenséggel jellemezhető teljes félsíkban, de ennek a feltételnek $(f<g$ megoldása (négyzetreemelése) előtti) biztosítása nem járható út, hisz $-f<g$ megoldását követelné. Szerencsére egy négyzetgyökös kifejezés (f vagy g) értékkészlete mindig nemnegatív, ezért nem nehéz f és g közül a „kisebbnek" nem negatív, a „nagyobbnak" pozitív értékét még négyzetreemelés előtt, egyetlen kiegészítő feltétellel biztosítani. Ez már mindenképp elégséges (bár elvileg nem szükséges) feltétel az ekvivalenciához. (A rajzon a jobb oldali, felső, szaggatott vonalas síknegyed!)

$$(f < g) \wedge (0 \leqq f < g) \Leftrightarrow$$

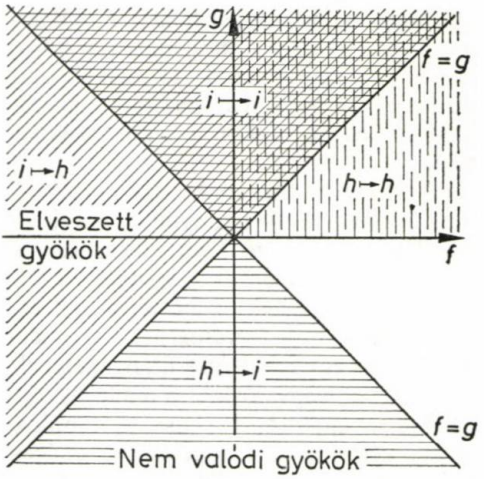
$$\Leftrightarrow (f^2 < g^2) \wedge (0 \leqq f < g).$$

Természetesen nem szabad megfeledkezni a fenti feltételben nem szereplő eset külön megvizsgálásáról és mindkettőnél a kiindulási halmazzal való „metszés"-ről!

Konkrét példa:

$$4-3x<\sqrt{(x-1)(2-x)}.$$

Most $4-3x\geqq 0$ a kiegészítő feltétel, és külön vizsgálandó a $4-3x<0$ eset!



Helyreigazítás

Folyóiratunk XXXIV. évfolyamának 1. számához — a korábbi gyakorlatnak megfelelően — külön lapon mellékeltük az előző évfolyam cikkeinek és egyéb közleményeinek összegező tartalomjegyzékét.

Ez természetesen A Matematika Tanítása *1986. évi XXXIII. évfolyamában* megjelent cikkeket és egyéb közleményeket foglalja magában. Sajnálatos módon a külön lap fejcíme hibásan jelent meg.

Kérjük Kedves Olvasóink szíves elnézését, továbbá azt, hogy a birtokukban levő példányon szíveskedjenek kijavítani a naptári év arab, valamint az évfolyam római számírással írt sorszámát.

SKANDERÁNÉ DR. APOR MÁRIA
középiskolai tanár
Ady Endre Gimnázium és Egészségügyi Szakközépiskola, Nagyatád

A térszemlélet fejlesztésének lehetőségei a középiskolában

(Beszámoló egy kísérletről)

1. Az oktatás feladata, hogy egységes, korszerű és továbbfejleszthető ismereteket nyújtson. A matematikai — és ezen belül a geometriai — ismeretek csak akkor felelnek meg a fenti követelményeknek, ha megteremtik a sík- és térgeometria egységét, fejlesztik a tanulók térszemléletét.

A jelenlegi általános iskolai tanterv az előzőkhöz képest nagyobb hangsúlyt helyez a síkgeometria mellett a térgeometria oktatására. A térgeometria alapfogalmait modellek segítségével tanulják a tanulók, ismerkednek a testekkel és jellemző tulajdonságaival, továbbá egyszerűbb térgeometriai feladatokat oldanak meg. Mindezekkel felkelthető a tanulók érdeklődése a térgeometria iránt, alakítható, fejleszthető térszemléletük, hiszen az itt szerzett ismeretekre, képességekre kell támaszkodni a középiskolában.

Oktató munkám során azt tapasztaltam, hogy a térbeli viszonyok elképzelése, a valóságot tükröző ábra elkészítése, a térgeometriai feladatok megoldása a tanulók többségének nehézséget jelent. Ezért kerestem a folyamatos térgeometria-oktatás egy lehetséges útját, melynek segítségével megvalósítható a sík- és térgeometria együttes tanítása, a tanulók térszemléletének szükséges és lehetséges fejlesztése. A térszemlélet tudatos fejlesztésének szükségességéről Kárteszi Ferenc [3] véleményét idézem: „Az pedig statisztikai tény, hogy a térbeli alakzatok helyes és világos szemlélete, a térbeli összefüggések szemléletes szinten való felfogása a legtöbb embernek fokozottan nehéz... Erőteljes és eleven térszemlélete viszonylag kevés embernek van; ... Igaz, hogy a térszemlélet nagymértékben fejleszthető. A fejlődés azonban csak évekig tartó alapos foglalkoztatásnak és a korszerű pedagógiai eljárások hozzáértő alkalmazásának gyümölcseként jelentkezik."

2. A továbbiakban egy tanítási kísérletről számolok be, amelyet a nagyatádi Ady Endre Gimnázium és Egészségügyi Szakközépiskolában végeztem az 1983—84. és az 1984—85. tanévben.

A kísérlet célja: a jelenlegi tantervi követelmények között a törzs- és kiegészítőanyagban szereplő térgeometriai fogalmak könnyebb, egyszerűbb megtanítása, ennek segítségével a térszemlélet fejlesztése.

Ismert, hogy a térgeometria tanítása során a szemléltetés, a modellezés igen fontos, de legalább ennyire lényeges a térbeli alakzatoknak a síkon történő ábrázolása. Ez különböző módszerekkel történhet. *Az általam választott módszer* a tér pontjainak egy síkra (képsík) történő merőleges vetítése (a továbbiakban *a merőleges vetítés*). Ezzel olyan *eszköz* jut a tanulók kezébe, amit jól hasznosíthatnak a sík- és térgeometriai feladatok egységes tárgyalásában. A módszer alkalmas arra is, hogy a *térbeli viszonyokat méthűen tükröző* olyan ábrát készíthessünk, amelyekről bizonyos távolságok, szögek valódi nagysága leolvasható. Ehhez természetesen meg kell találni azt az alkalmas képsíkot, amelyre vetítve a keresett távolságok és szögek valódi nagyságban látszanak. A módszer tehát *általános* olyan értelemben, hogy míg a test helyzete változatlan, a képsík célszerű megválasztásával tehetjük a feladat megoldását egyszerűbbé. Ez nagymértékben segíthet annak a képességnek a fejlesztésében, amellyel a térbeli dolgokat, problémákat elképzeljük, illetve lerajzoljuk.

A merőleges vetítés tanítása és alkalmazása *rendszeres szemléltetést* igényel.

Törekedni kell arra, hogy ez változatos legyen, nehogy egy adott helyzethez, egy adott modellhez kapcsolódjanak a tanulók fogalmai.

A kísérlet során az alábbi kérdésekre kerestem a választ:

1. Jelent-e nehézséget a merőleges vetítés fogalmának bevezetése már első osztályban a tanév elején?

2. Hogyan lehet a merőleges vetítést négy éven át a térgeometriai problémák tárgyalásánál felhasználni?

3. Mely anyagrészeknél valósítható meg a sík- és térgeometria együttes tanítása a merőleges vetítés alkalmazásával?

A tanítási kísérlet 1983 szeptemberében indult iskolánk egyik első évfolyamos gimnáziumi osztályában. A párhuzamos osztályban a tanterv szerint folyt az oktatás. Az általános iskolában már tanult geometriai alapfogalmak és egyszerűbb tételek átismétlése után (térelemek kölcsönös helyzete, távolságuk, merőlegesség, párhuzamosság stb.) bevezettem a merőleges vetítést, megtanítottam számunkra fontos tulajdonságait (adott térelemek távolsága és szöge a térelemek helyzetéhez viszonyított, mely képsíkon látszik valódi nagyságban stb.). A ponthalmazok tanításánál már alkalmaztam a merőleges vetítést. Azokat a sík- és térbeli ponthalmazokat tanítottam együtt, amelyek a merőleges vetítés segítségével páhuzamba állíthatók (2., 3., 4., 5. feladat). A tankönyvben található, síkbeli ponthalmazokra vonatkozó adatoknak — ha lehetett — mindig megfogalmaztuk a térbeli megfelelőjét. Természetesen, ha többféle térbeli általánosításra volt lehetőség, akkor többféle megfogalmazást adtuk.

Az első osztályban tanítandó geometriaanyagban az egybevágósági transzformációknál alkalmaztam még a merőleges vetítést. *Párhuzamba állítottam* a síkbeli tengelyes tükrözést és a síkra vonatkozó tükrözést, a tengelyesen szimmetrikus síkidomokat és a síkszimmetrikus síkidomokat és testeket. Ezekkel újabb lehetőség adódott a sík- és térgeometriai feladatok összekapcsolására (8. feladat).

A második osztályban tanítandó geometriaanyag az alábbi lehetőséget adta a merőleges vetítés alkalmazására:

— a tengely és a pont körüli forgatás összekapcsolása,
— a térelemek távolságára és szögére vonatkozó feladatok megoldása,
— a háromszög és a tetraéder szögfelező egyeneseinek, illetve síkjainak tulajdonsága.

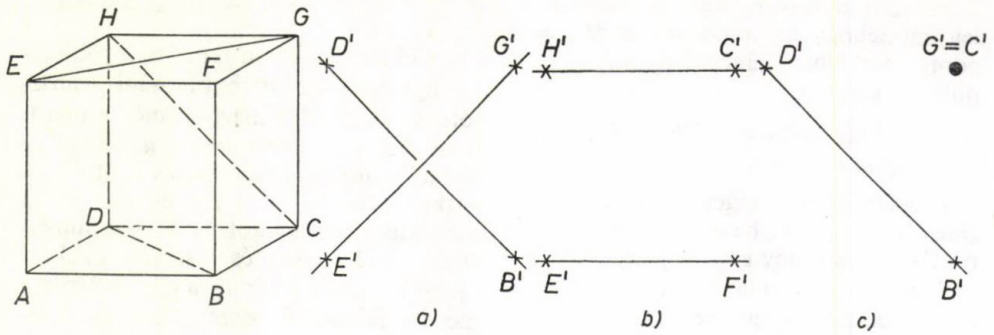
A merőleges vetítés tanításánál külön gondot kellett fordítani a vetületek rajzolására. Minthogy a merőleges vetítés nem kölcsönösen egyértelmű leképezés, ezért meg kellett különböztetni a pont és a képsíkra merőleges egyenes (vetítősugár), illetve a képsíkhoz képest általános helyzetű egyenes, és a képsíkra merőleges sík (vetítősík) vetületét. A P pont vetületét jelölje X P', az e vetítősugárét ● e', az a egyenesét ——— a', az S vetítősíkét pedig ——— S'. (A tanítás során másképp történt a megkülönböztetés, akkor pirossal rajzoltuk a vetítősugár és a vetítősík merőleges felületét.)

3. Néhány példa következik arra, hogyan sikerült a leírtakat a gyakorlatban megvalósítani.

1. feladat

Szemléltessük két egyenes kölcsönös helyzetét a kockán az élek, a lapátlók és a testátlók segítségével! A kocka $ABCD$ lapját választva képsíknak, rajzoljuk meg az egyenesek merőleges vetületeit is! Az ábrán kitérő egyenesek és vetületeik láthatók.

a) EG és DB,
b) HC és EF, vetítősíkjuk párhuzamos,
c) BD és GC, ahol GC vetítősugár,



A következő feladatok megfogalmazásában, írásmódjában és a rajzban a sík- és a megfelelő térbeli ponthalmazok egymás mellé kerülnek. Egy alakzat merőleges vetületének ábrázolásakor a képsík a rajz síkja.

2. feladat

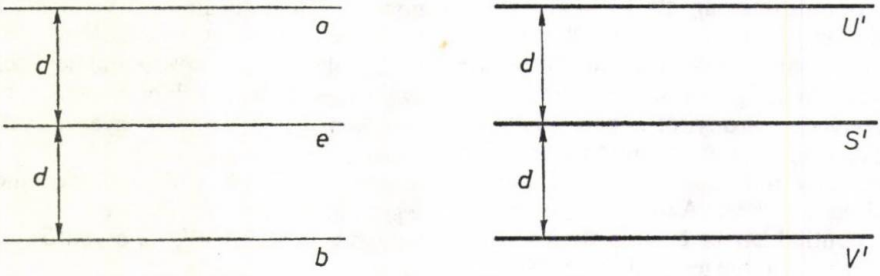
Az *e* egyenestől

Az *S* síktól

adott *d* távolságra levő pontok halmaza

az *e*-t tartalmazó síkban az *e*-vel párhuzamos, *d* távolságra levő *a* és *b* egyenes,

a térben az *S*-sel párhuzamos, *d* távolságra levő *U* és *V* sík,



3. feladat

Két metsző

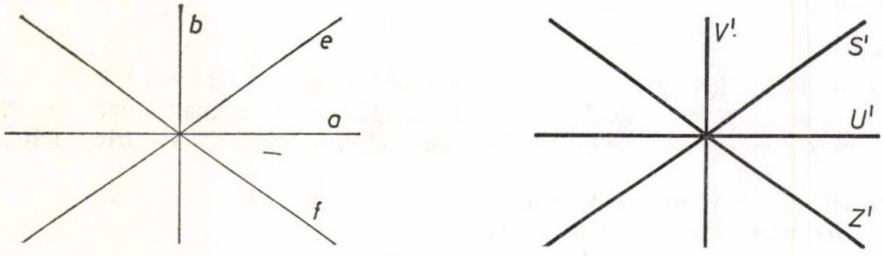
e és *f* egyenestől

S és *Z* síktól

egyenlő távolságra levő pontok halmaza

az egyenesek síkjában az *e* és *f* szögfelező egyenesei.

a térben az *S* és *Z* szögfelező síkjai.



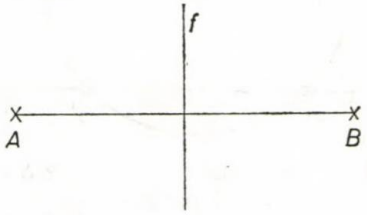
A feladat második osztályban általánosítható, ha azon pontokat keressük a síkban, illetve a térben, amelyeknek két metsző egyenestől, illetve síktól mért távolságának aránya állandó.

4. feladat

Az A és B ponttól

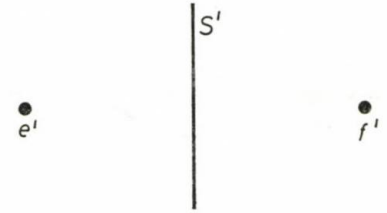
egyenlő távolságra levő pontok halmaza

a síkban az AB szakasz felezőmerőlegese.



$e \parallel f$ egyenestől

a térben az e és f egyenesekkel párhuzamos, távolságukat felező sík.



5. feladat

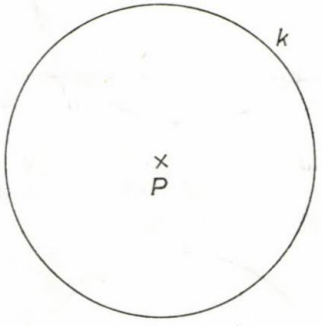
Adott

P ponttól

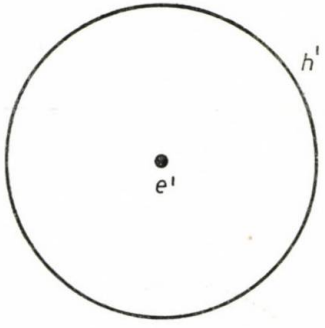
e egyenestől

adott d távolságra levő pontok halmaza

a P pontra illeszkedő síkban a P körül, adott d sugárral rajzolt körvonal.



a térben az e tengelyű, d sugarú hengerfelület.



A ponthalmazok együtt-tanítása után a tankönyvben található síkgeometria feladatoknak így adható meg a térbeli megfogalmazása.

6. feladat ([4] 31. f.)

Adott egy e egyenes és egy nem illeszkedő P pont.

Adott egy S sík és egy párhuzamos e egyenes.

Hány olyan pont van

az egyenesen

a síkon,

amelynek a felvett

ponttól

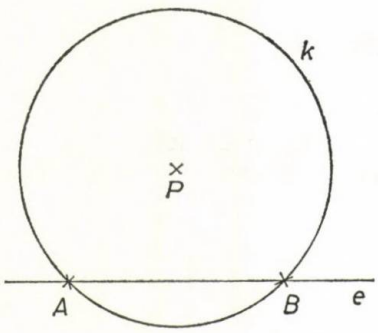
egyenestől

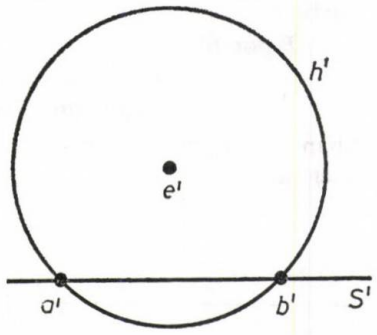
mért távolsága

a) kisebb, mint 5 cm, *b)* 5 cm *c)* nagyobb mint 5 cm?

Mitől függ, hogy hány ilyen pont van?

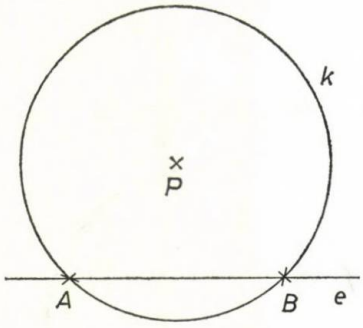
a)

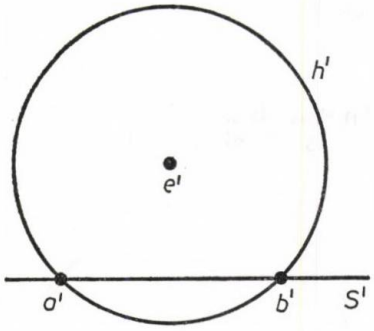




A megoldás üres halmaz, vagy az *S* síknak az *e* egyenessel párhuzamos, *a* és *b* egyenesek által határolt sávja.

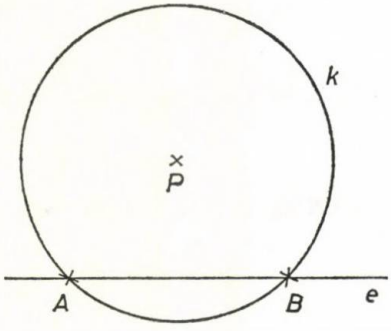
b)

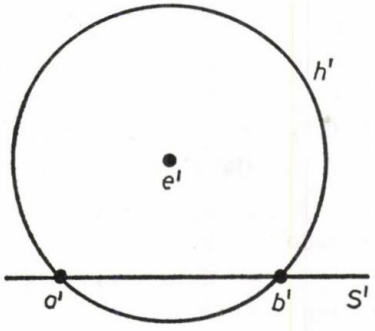




A megoldás üres halmaz vagy egy, vagy két, az *e* egyenessel párhuzamos, az *S* síkra illeszkedő *a* és *b* egyenes.

c)





A megoldás vagy a teljes sík, vagy az *S* síknak az *a* és *b* egyenesek által határolt két félsíkja.

7. feladat ([4] 32 f.)

Két párhuzamos

egyenes, e és f sík, S és U

távolsága 6 cm.
Az általuk határolt

sávban térrészben

vegyünk fel egy

P pontot $p \| S$ egyenest.

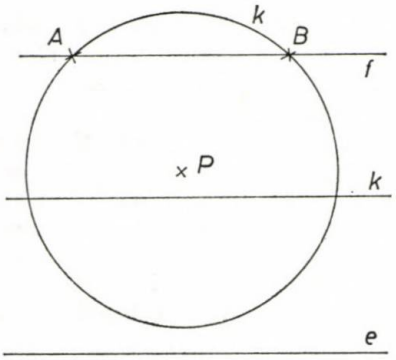
Szerkesszük meg az

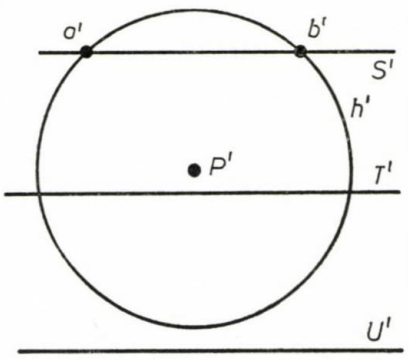
egyeneseknek síkoknak

azokat a pontjait, amelyek a felvett

ponttól egyenestől

3 cm távolságra vannak!





A megoldás az $a \| p$ és $b \| p$ egyenesek, ahol vagy $a \in S$ és $b \in S$ vagy $a \in U$ és $b \in U$, vagy $a \in S$ és $b \in U$ teljesül.

Hasonlóan fogalmazható át és oldható meg a tankönyv 44., 46., 47., 50., 51., 58., 68., 69. feladata.

A geometriai transzformációk közül párhuzamba állítottam a síkbeli tengelyes tükrözést és a síkra vonatkozó tükrözést. Ismert, hogy a síkra vonatkozó tükrözés minden, a tükrözés síkjára merőleges síkban egy olyan síkbeli tengelyes tükrözést hoz létre, melynek tengelye a két sík metszésvonala. A tükrözés S síkjának rögzítése után a teret egy, az S síkra merőleges R síkra vetítettük, ahol R a rajz síkja.

A következő feladat és megoldása a két transzformáció és a merőleges vetítés kapcsolatát mutatja.

8. feladat

Adott egy

e egyenes S sík

és az általa határolt egyik

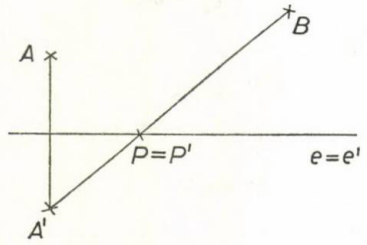
félsíkban féltérben

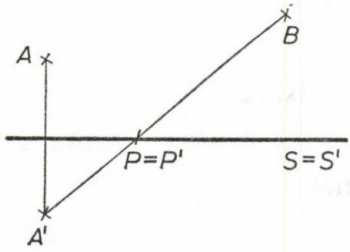
az A és B pont.

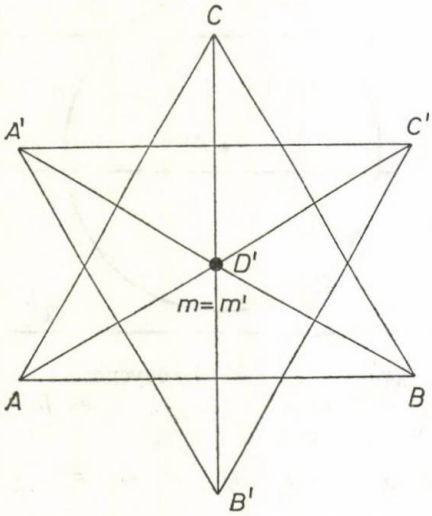
Szerkesszük meg az

e egyenesnek S síknak

azt a P pontját, amelyre nézve a $PA+PB$ töröttvonal hossza a legrövidebb.







Legyen a rajz síkja az A és B pontokra illeszkedő, S síkra merőleges sík. Ekkor a térbeli feladat megoldását visszavezettük a síkbeli esetre.

A második osztályban tanítandó tengely és pont körüli forgatást is párhuzamosan tárgyaltam. A két transzformáció rajzban történő összekapcsolása akkor egyszerű, ha a rajz síkja a forgástengelyre merőleges. Ezt példázza az alábbi feladat, amelyet negyedik osztályban célszerű megoldani.

9. feladat

Forgassunk el egy a élű szabályos tetraédert egyik magasságegyenese körül 60°-kal! Határozzuk meg az eredeti és az elforgatott tetraéder közös részének térfogatát!

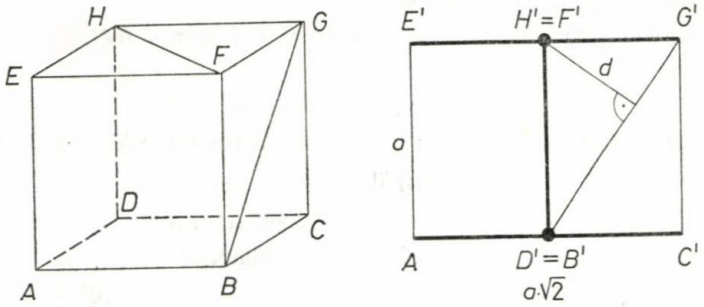
Vetítsük a szabályos tetraédert az egyik, pl. az ABC lapjára merőlegesen! A test magassága ekkor vetítősugár, tehát a tengely körüli forgatás a rajz síkjában elvégezhető. Könnyen belátható, hogy a két test közös része egy D csúcspontú, szabályos hatszög alapú gúla, melynek térfogata a tetraéder éle ismeretében kiszámítható.

A hasonlóság és a merőleges vetítés összekapcsolásának egy szép példája a szögfelező-tétel térbeli általánosítása. A háromszög külső szögfelezőinek a belsőhöz hasonló tulajdonságát is megtaníthatjuk a bizonyításhoz szükséges szokásos ábra kis kiegészítésével. *A tétel térbeli általánosítása:* A tetraéder belső, illetve külső szögfelező síkja a szemközti élt (ha metszi), a szöget alkotó lapok területének arányában osztja. A bizonyítás a síkbeli tételhez hasonlóan végezhető el, ha a tetraédert a szöget alkotó lapok metszésvonalára merőlegesen vetítjük.

A térelemek távolságára és szögére vonatkozó feladatok megoldásánál is hasznos eszköz lehet a merőleges vetítés.

10. feladat

Határozzuk meg az a élű kocka két kitérő lapátlójának távolságát (pl. HF és BG)! A két kitérő lapátló lehet két szemközti lapon, (ekkor távolságuk a kocka éle) és két szomszédos lapon.



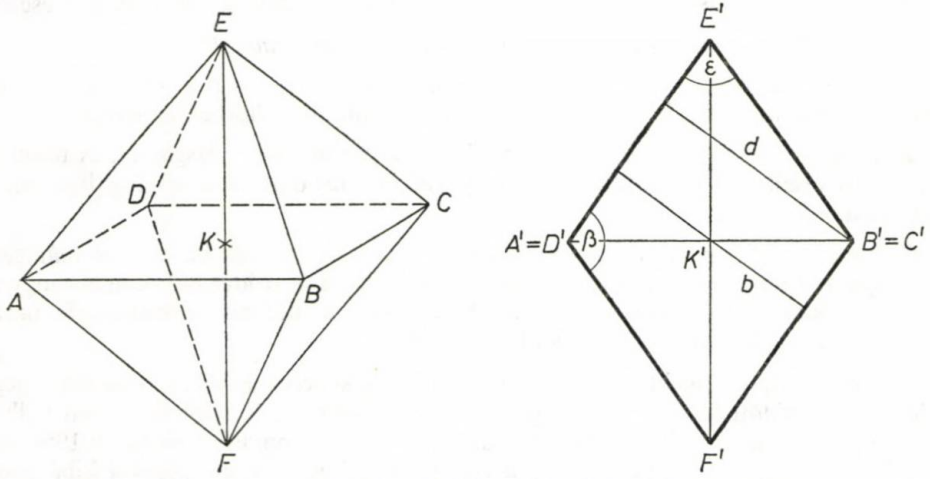
Vetítsük a kockát a HF lapátlóra merőlegesen! Ekkor HF vetítősugár, a keresett d távolság pedig párhuzamos a képsíkkal, ezért valódi nagyságban látszik. Hossza a kocka élének ismeretében kiszámítható.

11. feladat

Számítsuk ki az a élű szabályos oktaéder

a) két kitérő élének távolságát (BC-t és AE-t),
b) a BC él és az ADE sík távolságát (d)-t,
c) az ADE és a BCF sík távolságát (b-t),
d) az ADE és a BCE sík szögét (ε-t),
e) az ADE és az ADF sík szögét (β-t)!

a) Vetítsük a szabályos oktaédert a BC élre merőleges síkra! A vetület ekkor egy rombusz, melynek oldalhossza $\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$, átlói pedig a és $a \cdot \sqrt{2}$ hosszúak. A BC él vetítősugár, ezért a keresett d távolság párhuzamos a képsíkkal, tehát valódi nagyságban látszik.



b) A BC él vetítősugár az ADE sík vetítősík, tehát d távolságuk párhuzamos a képsíkkal, ezért valódi nagyságban látszik.

c) Mindkét sík vetítősík, így b távolságuk párhuzamos a képsíkkal, tehát valódi nagyságban látszik.
d) e) Két sík hajlásszöge akkor látszik valódi nagyságban, ha a képsík a metszésvonalukra merőleges, tehát ha mindkét sík vetítősík. A keresett ε és β szögek ezért a vetületen valódi nagyságban látszanak.

A térgeometriai bizonyításoknál is hasznos eszköz lehet a merőleges vetítés.

12. feladat

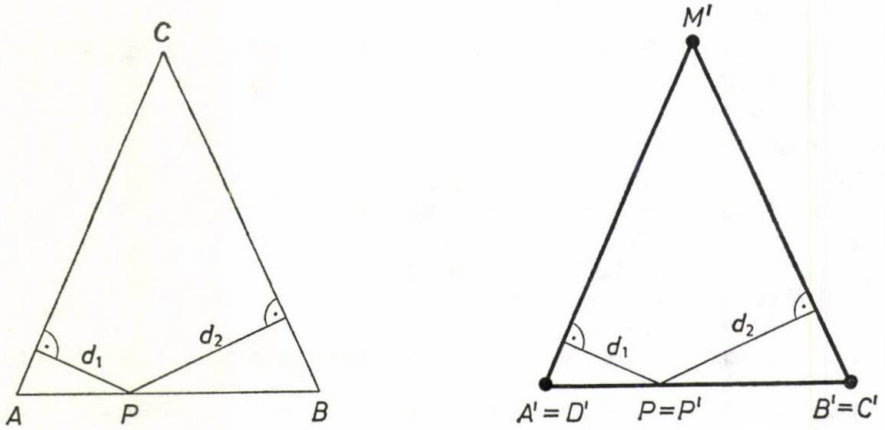
Bizonyítsuk be, hogy

az egyenlő szárú háromszög alapján a szabályos négyoldalú gúla alaplapján

levő tetszőleges P pontnak

a két szártól az oldallapoktól

mért távolságösszege állandó!



Vetítsük a szabályos négyoldalú gúlát az alaplap egyik élére (pl. AD-re) merőleges síkra! A P pontnak az oldallapoktól mért távolsága valódi nagyságban látszik, mert az oldallapok vetítősíkok. Így a feladat megoldását visszavezettük a síkbeli esetre.

4. *Az első és második osztályban végzett kísérlet tapasztalatai:*

1. A törzsanyagot elvégeztem, amellett számos, a kiegészítő anyagban szereplő térgeometriai fogalmat is meg tudtam tanítani a tanulók túlterhelése nélkül.

2. Hasznos volt a sík- és térbeli problémák párhuzamos vizsgálata. A tanulók maguk is készítettek feladatokat úgy, hogy a síkbeli feladatoknak megfogalmazták a térbeli megfelelőjét.

3. Nem jelentett nehézséget a merőleges vetítés fogalmának bevezetése már első osztályban a tanév elején. A kísérlet során a tanulók sok példát láttak arra, hogyan egyszerűsödhet a feladatok megoldása. Felismerték a módszer célszerűségét, hasznosságát, később már önállóan is alkalmazták.

4. Az osztály gyengébb térszemléletű tanulói is képesek lettek a feladatok megoldására, fejlődött térszemléletük, gazdagodott térlátásuk. Később is bátran vállalkoztak a térgeometriai feladatok megoldására. Ennek bizonyítéka, hogy az 1986. évi OKTV. 4. sz. feladatát az osztályból a versenyen induló 5 tanuló közül 4 hibátlanul megoldotta. (Az $ABCD$ szabályos tetraéder D csúcsából a szemközti ABC lapra bocsájtott merőleges szakasz felezőpontját jelölje P! Jelölje továbbá rendre t_{ABC}; t_{ABP};

t_{BCP}; t_{CAP} az ABC; ABP; BCP; CAP háromszögek területét! Igazolja, hogy $t^2_{ABC} = t^2_{ABP} + t^2_{BCP} + t^2_{CAP}$!)

A cikkben közölt módszer természetesen nem alkalmazható minden feladat megoldásánál, csupán egy lehetséges útja a sík- és térgeometria együttes tanításának, a tanulói térszemlélet fejlesztésének. A kísérlet azt igazolta, hogy a fenti elv a gyakorlatban megvalósítható. A megvalósítás a tanár részéről alapos felkészülést igényel és szükségessé teszi, hogy az elvet tudatosan — szinte egy órán sem megfeledkezve róla — kell alkalmazni.

Ezúton is megköszönöm Dr. Horváth Jenőnek, az ELTE docensének értékes tanácsait, segítségét, melyet a kísérlet tervezésekor és végrehajtásakor nyújtott.

IRODALOM

[1] HOLLAI MÁRTA: *A merőleges vetítés korai tanításának előnyei.* ELTE Szakmódszertani Közleményei V. 1978.
[2] HORVAI KATALIN—REIMAN ISTVÁN: *Geometriai feladatok* gyűjteménye I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
[3] KÁRTESZI FERENC: *Szemléletes geometria.* Gondolat, Budapest, 1966.
[4] KORÁNYI ERZSÉBET: *Matematika I. osztály* (gimnáziumi tankönyv). Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.
[5] KORÁNYI ERZSÉBET: *Matematika II. osztály* (gimnáziumi tankönyv). Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

UJVÁRI ISTVÁN
vezető tanár
Lőwy Sándor Műszaki Szakközépiskola, Vác

Matematikai tömegversenyek tapasztalatai

A váci Lőwy Sándor Műszaki Szakközépiskola az idén másodízben rendezett tehetségkutató matematikai tanulmányi versenyt a környékbeli általános iskolák nyolcadikosai számára. Ezen tavaly 23 iskolából 180, az idén 44 iskolából 242 tanuló vett részt. Az imponáló számok azt mutatják, hogy sikerült a verseny célkitűzését és díjazását vonzóvá tenni a résztvevők és nevelőik számára. Ezekről, valamint a bőséges szervezési tapasztalatokról szóló beszámolót a széles pedagógus közvéleménynek szánjuk, amiről az érdeklődők a KÖZNEVELÉS Továbbképzés elnevelésű rovatában olvashatnak. Matematikatanár kollégáink számára itt azt írjuk le, hogy milyen feladatsorokat használtunk ezen a két versenyen, mert ezt tartjuk a lebonyolítás kulcskérdésének.

A fő feladat az volt számunkra, hogy a tanulók közül ki tudjuk válogatni azt a 40-et, 50-et, akikkel majd később a központi szakkörünket működtetjük. De még ezek között is differenciálni akartunk, legalább 3 rétegre bontva e legjobbakat. A résztvevők magas száma dacára is *azonnali eredményhirdetésű* versenyt terveztünk, ami miatt a feladatokat úgy kellett szerkeszteni, hogy

— 60 perc munkaidő alatt a lehető legtöbb területről nyújtson információt. Ez indokolta a számolásigényes és a szerkesztési feladatok mellőzését;
— a javítás ideje se legyen 1 óránál több, hogy az eredményhirdetést a távolabbról érkező tanulók is megvárhassák.

Az előzőekben leírtak megvalósítására az *1985. évi versenyünkön* feleletválasztós feladatsorral válogattunk ki 40 tanulót, majd egy újabb, de most már konstruktív feladatokat tartalmazó feladatsorral 3 első, 16 második és 12 harmadik díjast hirdet-

tünk. A *selejtező* feleletválasztós *feladatsora* A és B változatban készült. Az egyik az alábbi volt:

1. Írd a legegyszerűbb alakba az $\frac{5{,}24+1}{3{,}24+5}$ törtet!

(1) $\frac{11}{7}$ (2) $\frac{121}{77}$ (x) $\frac{3}{4}$

2. Legyen $A=1984^2\cdot 1985+1984^2$ és $B=1987\cdot 1984^2-1984^2$. Melyik a nagyobb? Vagy egyenlők?

(1) A nagyobb (2) B nagyobb (x) egyenlők

3. Az a, b, c racionális számok közül egyik pozitív, másik negatív, harmadik nulla. Azt is tudjuk, hogy $a=\frac{b^2}{b^2+c^2}$. Melyik a negatív?

(1) a (2) b (x) c

4. Néhány kosárban tyúktojás van, a többiben kacsatojás. Az egyes kosarakban a tojások száma 4, 6, 12, 13, 22 és 29. „Ha ezt a kosarat eladom — morfondíroz az árus — akkor pontosan kétszer annyi tyúktojásom lesz, mint kacsatojásom." Melyik kosárra gondolt az eladó?
(1) amelyikben a legtöbb tojás van;
(2) amelyikben a legkevesebb tojás van;
(3) nincs megoldása a feladatnak.

5. Tudjuk, hogy januárban pontosan 4 hétfő és 4 péntek volt. A hét melyik napjára esett január elseje?

(1) keddre (2) szerdára (x) csütörtökre

6. Ha 5 pók 5 perc alatt 5 legyet fog, akkor hány pók fog meg 100 perc alatt 100 legyet?

(1) 5 (2) 20 (x) 100

7. Igaz-e, hogy minden osztályban biztosan van két olyan tanuló, akinek a hónap ugyanannyiadik napjára esik a születésnapja? (pl. április 25-re és május 25-re)

(1) igen (2) nem (x) az osztály létszámától függ.

8. Egy derékszögű háromszög átfogója 5,2 cm, egyik befogója 2,6 cm. Mekkora a háromszög legkisebb szöge

(1) 30° (2) 45° (x) nem határozható meg egyértelműen.

9. Ha összeadjuk egy konvex sokszög belső szögeit — egyikük kivételével — akkor összegül 2570°-ot kapunk. Ez esetben a kimaradt szög mérőszáma:

(1) 90°, (2) 120°, (x) 130°.

10. Egy tavirózsa mindennap a kétszeresére nő. A 32. napon ellepi a tavat. Hányadik napon növi be a tó egynegyedét?

(1) a 8. napon (2) a 16. napon (x) a 30. napon

A döntő feladatsora:

1. Egy 8. osztályban mindenki gimnáziumban vagy szakközépiskolában szeretett volna továbbtanulni. 9 fiú gimnáziumba, 9 fiú szakközépiskolába jelentkezett. Felvettek középiskolába az osztályból 14 tanulót, közülük 5-öt szakközépiskolába. Az összes felvettek között 6 fiú volt. Nem vettek fel 7 gimnáziumba jelentkező lányt és 7 szakközépiskolába jelentkező fiút, de minden szakközépiskolába jelentkező lányt felvettek.
Hányan voltak az osztályban?

2. A várudvar alaprajza szabálytalan négyszög, két-két sarokbástyáját 36 m hosszú, nyugat—kelet irányú és 52 m hosszú, észak—déli irányú út köti össze.
Mekkora a várudvar területe?

3. Add meg mindazokat a természetes számokat, amelyek az alábbi tulajdonságok mindegyikével rendelkeznek:
   a) oszthatók 8-cal;
   b) számjegyeik összege 7;
   c) számjegyeik szorzata 6.

A feleletválasztós feladatsor meglehetősen nehéznek bizonyult. A 10 és 9 találatot elérő tanulók száma alatta maradt a tervezett 40-nek; a 8 találatosok közül azokkal egészítettük ki a létszámot, akik bizonyos, nehezebbnek vélt feladatokat megoldottak. Itt pedig belejátszott bizonyos fokú tanári szubjektivitás, hiszen nem biztos, hogy valóban azok a feladatok voltak a nehezebbek, amelyeket a tanárok annak véltek. A döntő 1. és 2. feladatát általában jól oldották meg a tanulók, a 3. feladat teljes megoldása azonban mindössze 3-nak sikerült.

Az 1986. évi versenyen a már meglevő időbeli kritériumokhoz (60 perc munkaidő, kb. annyi javítási idő) újabbakat csatoltunk. Olyan legyen a feladatsor, hogy

— ne legyen szükség selejtezőre, az elbírálás mégis megnyugtató legyen;
— a díjazott tanulókat ne csak 3 rétegre tudjuk bontani, hanem akár az első 50 tanuló rangsorát is megállapíthassuk.

Az A és B változatban készült *feladatlap* közül az egyik a következő volt:

1. Egy szálloda 12 szobájában 32 férőhely van. A szobák 2, illetve 3 ágyasak. Hány 2 ágyas szoba van a szállodában?
2. A 2, 4, 5 és 6 számjegyekből képezd a lehető legkisebb, 4-gyel osztható számot!
3. A Várba vezető sikló pályájának hossza 100 m, két végállomása közti szintkülönbség 50 m. Hány fokos a pálya emelkedési szöge?
4. Hány olyan háromjegyű számunk van, amelynek mindhárom jegye páratlan?
5. A században 1 főtiszt, 3 tiszt és 12 tiszthelyettes van. A létszám ellenőrzésekor megállapították hogy tízszer annyi a beosztott, mint a feljebbvaló. Mennyi volt a teljes létszám?
6. Az autó kilométer-számlálóján érdekes szám jelent meg: 15951. (A számjegyek a középső 9-es számjegyre nézve szimmetrikusak.) Pontosan 2 óra múlva ismét szimmetrikus számot mutatott a kilométeróra. Mekkora átlagsebességgel tehette meg az autó a 2 órás utat?
7. A 4, ?, 7, 11, ?, 35 számsorozatban két szám helyére ?-et írtunk. Melyek ezek a számok?
8. Egy derékszögű háromszög két hegyesszögének különbsége 36°. Mekkorák ezek a szögek?
9. Egy vetélkedőn maximálisan 20 kérdést tehettek fel. A jó válaszokért 5 pontot adtak, a rosszakért 3 pontot levontak. Hány kérdést kaphatott Péter, ha összesen 36 pontot szerzett?
10. Hányféleképpen teríthetjük ki a síkba a kocka palástját? Rajzolj meg minél több hálózatot!

Mellékeltünk egy fontos *információkat* tartalmazó lapot is:

Kedves Pajtás!

Mielőtt a feladatok megoldásához kezdenél, kérünk, figyelmesen olvasd el az alábbiakat:
A mellékelt feladatlapon 10 feladatot találsz. Ezek közül

— az 1—5. sorszámú könnyebb, ezek megoldása 1-1 szám;
— a 6—9. sorszámú nehezebb, ezek megoldása 2-2 szám;
— a 10. sorszámú a legnehezebb, mert egyszerre teszi próbára a térszemléletedet és a kombinációs készségedet. Ez a feladat azonban csak a *holtversenyek* eldöntésére szolgál, ezért utoljára foglalkozz vele.

Az 1—9. feladatok megoldását jelentő számokat írd be az eredménylapra, a megfelelő rovatba. A mellékszámításokat bármilyen papíron végezheted, azt nem kell beadnod. A 10. feladat hálóit az eredménylap hátoldalán rajzold meg.
A feladatokkal 60 percig dolgozhatsz. A feladatlapot és a számításaidat hazaviheted, csak az eredménylapot kell beadnod.

Jó munkát!

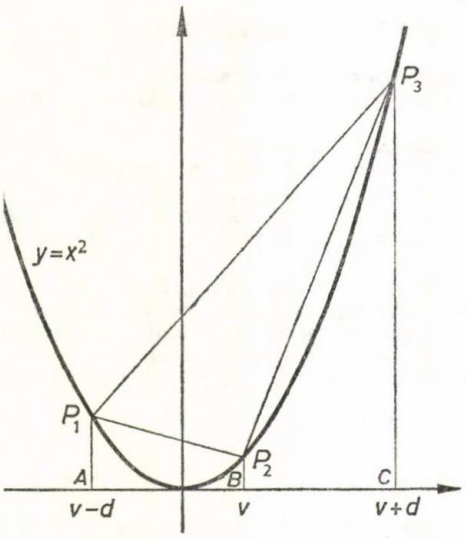
A tapasztalatok azt mutatták, hogy ezzel a feladatsorral elértük a kitűzött célt. Az 1—9. feladatot most is kevesen, mindössze 4-en oldották meg hibátlanul, 11-en kerültek a második, 28-an a harmadik „rétegbe", de most ezeket is rangsorolni tudjuk a 10. feladat alapján, melynek 11 megoldása van. (Lásd Vilekin: Kombinatorika,

319. oldal!) A versenyző tanulók és tanáraik véleménye az volt, hogy érdekes, a fantáziát megmozgató és nem nehéz feladatokból egy viszonylag igényes, sokféle gondolkodási műveletet igénylő feladatsor állt össze. Mi a célszerűség szempontjából tartottuk megfelelőnek: *alkalmas volt arra, hogy nagy tömegű tanulóból rövid idő alatt, viszonylag objektív módon kiválasszuk és rangsoroljuk a legjobbakat.*

FITOS LÁSZLÓ
ny. főiskolai docens
Esztergom

Parabolába írt sokszögek területével kapcsolatos érdekességek

Mielőtt e témakör tárgyalásához hozzáfognék, felhívom a kartársak figyelmét arra, hogy e cikk anyaga nemcsak a tanulók érdeklődésének felkeltésére és gondolkodásának fejlesztésére alkalmas, hanem arra is, hogy tanítványainkat a felfedezés öröméhez juttassuk és bevezessük a tudományos kutatómunka rejtelmeibe, természetesen megfelelő problémafelvető módszerrel.



Parabolába írt sokszögnek nevezzük az olyan sokszöget, amelynek mindegyik csúcsa rajta van egy adott parabolán.

1. Kezdjük a témakört az $y=x^2$ parabolába írt háromszögek területének a kiszámításával! Vegyük először azt a speciális esetet, amikor a beírt $P_1P_2P_3$ háromszög csúcsainak abszcisszái egy $d>0$ differenciájú számtani sorozat egymás után következő elemei (1. ábra). Ha ebben az esetben a P_2 csúcs abszcisszáját v-vel jelöljük (v bármely valós szám), akkor a háromszög csúcsainak a koordinátái:

$$P_1[v-d;(v-d)^2],\quad P_2(v;v^2);$$
$$P_3[v+d;(v+d)^2].$$

E háromszög területét megkaphatjuk, ha az ACP_3P_1 trapéz területéből kivonjuk az ABP_2P_1 és a BCP_3P_2 trapéz területét, azaz

$$t_{P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}[(v-d)^2+(v+d)^2]\,2d-\frac{1}{2}[(v-d)^2+v^2]\,d-\frac{1}{2}[v^2+(v+d)^2]\,d.$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket, meglepő eredmény adódik:

$$t_{P_1P_2P_3}=d^3. \tag{1}$$

Tehát, ha d-t adottnak, v-t változónak tekintjük, akkor eredményünk azt mutatja, hogy a beírt háromszög területe állandó, nem függ v értékétől, azaz bárhol is vesszük fel a P_2 csúcsot a parabolán, a beírt háromszög területe mindig d^3.

Speciális eset, ha $d=1$, akkor a beírt háromszög területe egységnyi.

2. Írjunk most tetszőleges háromszöget az $y=x^2$ parabolába, és jelöljük a P_2 csúcs abszcisszáját v-vel ($v\in\mathbf{R}$), továbbá a P_2 és P_1, illetve P_3 és P_2 csúcsok abszcisszáinak különbségét p-vel, illetve q-val! Ha az előbbihez hasonló módon kiszámítjuk

a beírt háromszög területét, a következő képletet kapjuk:

$$t_{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}pq(p+q). \tag{2}$$

A terület most is független v-től és csak a p és q abszcisszakülönbségektől függ. Vegyük észre, hogy ez az általánosabb eredmény magában foglalja az 1. pontban tárgyalt speciális esetet, hiszen ha $p=q=d$, akkor $t=\frac{1}{2}dd\cdot 2d=d^3$.

Megjegyzések:

a) A (2) alatti képlet p-re és q-ra szimmetrikus, azaz p-t és q-t felcserélve, a kifejezés nem változik meg, a terület számértéke ugyanaz marad.

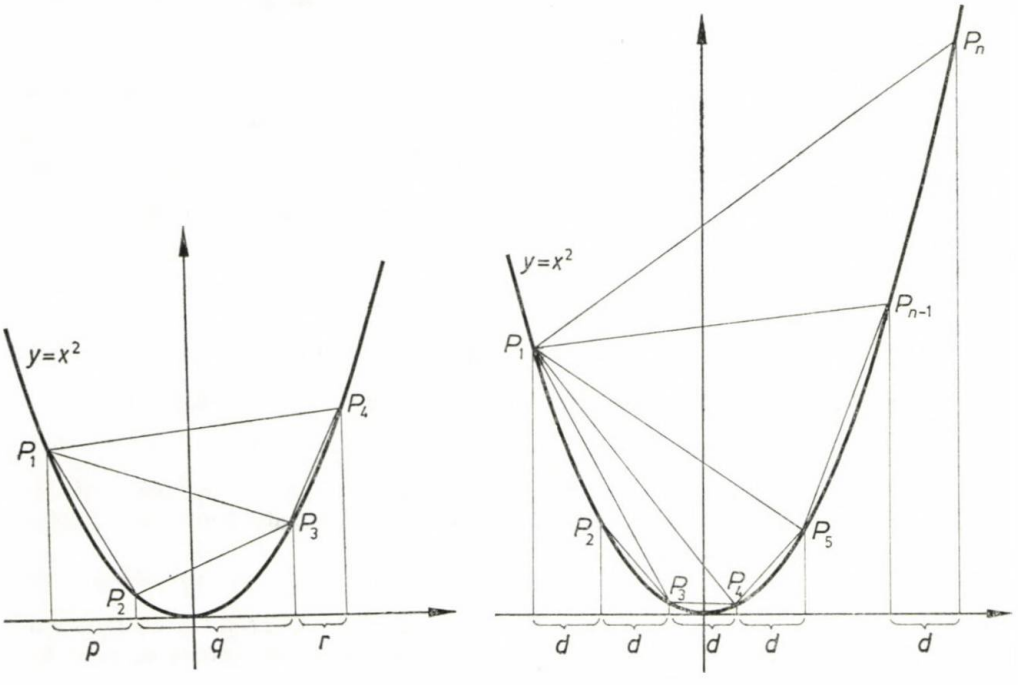
b) Ha p-t és q-t a csúcsok x_1, x_2, x_3 abszcisszáival fejezzük ki, akkor a (2) alatti képlet így módosul:

$$t=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)=\frac{1}{2}(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1).$$

3. Foglalkozzunk ezután az $y=x^2$ parabolába írt négyszögek területképletének a levezetésével! Az ilyen négyszög mindig felbontható két olyan háromszögre, amely a parabolába van írva (2. ábra), ezért a feladat visszavezethető beírt háromszögek területének a kiszámítására. Tehát a (2) alatti képlet alapján és a 2. ábra jelöléseivel

$$t_{P_1P_2P_3P_4}=t_{P_1P_2P_3}+t_{P_1P_3P_4}=\frac{1}{2}pq\,(p+q)+\frac{1}{2}(p+q)\,r\,(p+q+r)=$$

$$=\frac{1}{2}(p^2q+pq^2+p^2r+pr^2+q^2r+qr^2+2pqr)=\frac{1}{2}(p+q)(p+r)(q+r). \tag{3}$$



4. Nem jelent újabb problémát a parabolába írt 4-nél több oldalú sokszög sem, mert ez is felosztható csupa olyan háromszögre, amely a parabolába van írva. Most azonban az érdekessége miatt olyan speciális beírt n-szög területét fogjuk kiszámítani, amelynél a csúcsok abszcisszái $d>0$ differenciájú számtani sorozat egymásután következő elemei (3. ábra). Ha az n-szög területét a P_1 csúcsból húzott átlókkal bontjuk háromszögekre és ezek területének felírására a (2) alatti képleteket alkalmazzuk, akkor

$$t_{P_1P_2\ldots P_n} = t_{P_1P_2P_3}+t_{P_1P_3P_4}+t_{P_1P_4P_5}+\ldots+t_{P_1P_{n-1}P_n} = \frac{1}{2}\cdot d\,d\cdot 2d+\frac{1}{2}\cdot 2d\,d\cdot 3d+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot 3d\,d\cdot 4d+\ldots+\frac{1}{2}(n-2)\,d\,d(n-1)\,d = d^3\cdot\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n-1}{2}\right]$$

$$= d^3\cdot\binom{n}{3}. \tag{4}$$

Speciális eset, ha $d=1$, akkor

$$t_{P_1P_2\cdots P_n} = \binom{n}{3}. \tag{5}$$

Tudatosítsuk tanítványainkban, hogy minden újabb felfedezés újabb problémákat vet fel. Itt például az a kérdés merül fel, hogy az $y=x^n$ $(n=3, 4, \ldots)$ görbék esetén hogyan módosul a beírt háromszög területe. Neveljük tanítványainkat problémakeresésre, problémalátásra!

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor utca 10. II. 10., 1052 Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! (Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is!) A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1149. Az

$$x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1} = a$$

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 = x_{n+1} \quad (n \geqq 1)$$

egyenletrendszernek, mely a valós értékre van egyetlen valós megoldása?

Kovács Antal, Kézdivásárhely

1150. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszögbe írt kör sugara, továbbá a három oldalhoz írt körök sugarai pontosan akkor lesznek egy mértani sorozat egymásutáni tagjai, ha a háromszög derékszögű!

Csányi Péter, Nagykőrös

1151. Legyen P az $ABCD$ négyzet egy belső pontja és O_1, O_2, O_3, O_4 rendre a PAD, PAB, PBC, PDC háromszögek köré írt kör középpontja. Igazoljuk, hogy ha

az $ABCD$ négyzet területének fele az $O_1O_2O_3O_4$ négyszög területével egyenlő, akkor a PO_1AO_2, PO_2BO_3, PO_3CO_4, PO_4DO_1 négyszögek rombuszok!

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

1152. n darab zsák mindegyikében vagy csak az ismert súlyú A fajta, vagy csak az 1 ponddal könnyebb B fajtájú golyók vannak bőséges mennyiségben. Határozzuk meg súlyskálás mérlegen való egyetlen méréssel, mely zsákokban találhatók a könnyebb B fajtájú golyók!

Bege Antal, Csíkszereda

1153. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$2^x = 1+x+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!},$$

ahol n adott természetes szám!

Dályay Pál, Marosvásárhely

1154. Mutassuk meg, hogy bármely öt különböző valós szám közül kiválasztható kettő, a és b úgy, hogy az

$$\frac{1+ab}{a-b} > 1$$

fennálljon!

Cseh László, Székelyudvarhely

(Feladatmegoldások 1125—1130.)

1125. Igazoljuk, hogy bármely, 13-nál nagyobb egész szám felírható három — páronként relatív prím — 1-nél nagyobb természetes szám összegeként!

Sándor József, Farcád

I. megoldás: Bármely 13-nál nagyobb, n természetes szám felírható az

$$n = 4k+2, \quad n = 4k+3, \quad n = 4k+4, \quad n = 4k+5$$

alakok egyikében, ahol $k \geqq 3$ egész. Ennek megfelelően négy esettel kell foglalkoznunk.

1. eset: $n=4k+2$. Ekkor az
$n=(2k-1)+2+(2k+1)$

felbontás megfelelő, hiszen $k \geqq 3$ miatt a tagok mindegyike nagyobb 1-nél és a másodszomszéd páratlan számok relatív prímek, mert közös osztójuk különbségüknek, a 2-nek is osztója.

2. eset: $n=4k+3$. Ha most k osztható 3-mal, akkor az
$n=(2k-1)+3+(2k+1)$

felbontást, különben pedig az

$n=(2k-3)+3+(2k+3)$

felbontást választjuk. Az előbbi esetben alkalmazott megfontolásokkal látható be, hogy ezek a kívánt tulajdonságú felbontásokat adják.

3. eset: $n=4k+4$. Válasszuk most az
$n=(2k-1)+4+(2k+1)$

felbontást. Ez a feltételeknek eleget tesz. Végül a

4. eset: $n=4k+5$. Ha k osztható 5-tel, akkor az
$n=(2k-1)+5+(2k+1)$,

különben pedig az
$n=(2k-5)+5+(2k+5)$

felbontást válasszuk! E választások helyessége a $k>3$ esetben fentiek szerint történhet. Ha $k=3$, úgy a $17=1+5+11$ felbontásban az egyik tag nem nagyobb 1-nél! Könnyen látható, hogy *a 17-et nem lehet a kívánt módon felbontani*, ezért a feladat állítása módosításra szorul: vagy 17-nél nagyobb, vagy 17-től különböző, és 13-nál nagyobb számokra teljesíthető a kívánt felbontás.

Csorba Ferenc, Győr, Imolya Sándor, Hódmezővásárhely, Kovács Antal, Kézdivásárhely

II. megoldás: A feladat helyett a következőt bizonyítjuk: minden a 17-től különböző 13-nál nagyobb egész szám előállítható három, egynél nagyobb, páronként relatív prím összegeként. A 17-et nem lehet előállítani a kívánt módon, mert a $17=a+b+c$ felbontásban, ha $a<b<c$, úgy mindegyikük páratlan kell legyen és $a\geqq 3$, $b\geqq 5$ és $c\geqq 7$. Ezért a $15=3+5+7<a+b+c=17$ miatt a tagok egyikét kell növeljük 2-vel, de akkor lesz két nem relatív prím tag. Ha pedig $a\geqq 5$, úgy $a+b+c\geqq 5+7+9=21$ lenne.

A 17-től különböző és a 13-nál nagyobb egészek mindegyikére adunk egy-egy, a feltételeket kielégítő felbontást. Páros egészekre a 6-tal, páratlanokra a 12-vel való osztás maradéka szerint csoportosítjuk a számokat és adunk egy-egy maradékosztályra kívánt tulajdonságú felbontást. Az alábbi táblázat tartalmazza a feladatnak egy lehetséges megoldását:

n	a	b	c	
$6k$	2	3	$6k-5$	$k\geqq 2$
$6k+2$	3	4	$6k-5$	$k\geqq 2$
$6k+4$	2	3	$6k-1$	$k\geqq 1$
$12k+1$	9	$6k-7$	$6k-1$	$k\geqq 2$
$12k+3$	3	$6k-1$	$6k+1$	$k\geqq 1$
$12k+5$	9	$6k-5$	$6k+1$	$k\geqq 2$
$12k+7$	3	$6k-1$	$6k+5$	$k\geqq 1$
$12k+9$	9	$6k-1$	$6k+1$	$k\geqq 1$
$12k+11$	3	$6k+1$	$6k+7$	$k\geqq 1$

Könnyen látható, hogy a, b, c egynél nagyobb páronként relatív prímek. A felbontások általában nem az egyedüli lehetséges megoldások, mert például a

$$18 = 2+3+13 = 4+5+9 = 5+6+7$$

mindegyike eleget tesz feltételeinknek.

Mike János, Szeged, Szánthó Gyula, Gyula

Megjegyzés: A módosított feladat megtalálható W. Sierpiński: 200 feladat az elemi számelméletből, Tankönyvkiadó 1968., c. könyv *41.* feladataként. Az utóbbi megoldás az itt közölt megoldás gondolatmenetét követi. Azt is beláttuk, hogy minden 10-nél nem kisebb páros számnak van kívánt tulajdonságú felbontása.

Csete Lajos, Markotabödöge, Szánthó Gyula, Gyula

A megoldók száma: 29.

1126. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b és c egy háromszög oldalai, akkor

$$a(2a^2-b^2-c^2)+b(2b^2-c^2-a^2)+c(2c^2-a^2-b^2) \geqq 0!$$

Varga István, Nagyszalonta

Megoldás: Írjuk fel a háromszög mindhárom szögéhez tartozó cosinus-tételt:

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2+c^2-2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

Ezekből egyenlőtlenségünk bal oldala így alakul:

(1) $$a(2a^2-b^2-c^2)+b(2b^2-c^2-a^2)+c(2c^2-a^2-b^2) =$$
$$= a^3+b^3+c^3-2abc(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma).$$

Felhasználva, hogy a háromszög α, β, γ szögeire $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \leqq \frac{3}{2}$

(lásd: *Molnár Emil:* Matematikai Versenyfeladatok Gyűjteménye 1947—1970, Tankönyvkiadó, 1974. **170.** feladat) az (1) jobb oldala legalább

(2) $$a^3+b^3+c^3-3abc.$$

A számtani és mértani közepekre ismert egyenlőtlenségből

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqq \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc,$$

vagyis (2) nem negatív, és ezért (1) sem. Azt is beláttuk, hogy az egyenlőség pontosan akkor áll, ha a háromszög szabályos, azaz $a=b=c$.

Bege Antal, Csíkszereda, Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza, Kiss Zoltán, Pécs

A megoldók száma: 35.

1127. Határozzuk meg mindazokat a valós számtest feletti

$$P(x) := 2(n+1)x^n-3n(2n+1)x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

polinomokat, amelyekre $n\geqq 1$, és x_k gyökeire $k^2\leqq x_k\leqq(k+1)^2$, $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Felhasználva a gyökök és együtthatók közötti Viete-féle összefüggést a gyökök összegére:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{3n(2n+1)}{2(n+1)}$$

és ezért

(1) $$\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqq \frac{3n(2n+1)}{2(n+1)} \leqq \sum_{k=1}^{n} (k+1)^2.$$

A négyzetszámok összegére ismert képletből ezért

(2) $$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \leqq \frac{3n(2n+1)}{2(n+1)} \leqq \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}-1.$$

A (2) bal oldalából egyszerűsítések után

$$(n+1)^2 \leqq 9,$$

azaz

$$n \leqq 2.$$

Azt nyertük, hogy a (2) első felét csak az $\{1; 2\}$ halmaz elemei elégítik ki. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a (2) második felének ezek eleget tesznek, így két esetet kell tárgyalnunk.

I. eset: Ha $n=1$, akkor

$$P(x) = 4x-9$$

és $x_1=\frac{9}{4}$ gyökére $1^2\leqq\frac{9}{4}\leqq 2^2$ teljesül.

II. eset: Ha $n=2$, akkor

$$P(x) = 6x^2-30x+a_2.$$

Az a_2 valós számot úgy kell meghatároznunk, hogy a polinom x_1, x_2 zérushelyeire

(3) $$1 \leqq x_1 \leqq 4 \leqq x_2 \leqq 9$$

teljesüljön. Figyelembe véve, hogy e másodfokú függvény görbéje éppen az x_1 és x_2 zérushelyek között kerül az x tengely alá, ezért egyrészt

(4) $$\begin{cases} P(1) \geqq 0, \\ P(4) \leqq 0, \\ P(9) \geqq 0, \end{cases}$$

másrészt

(5) $$P(1) = P(4) = a_2-24.$$

A (4) és (5) egybevetésével

$$a_2 = 24$$

kell legyen. Ezzel

$$P(x) = 6x^2-30x+24.$$

A polinom gyökei $x_1=1$ és $x_2=4$, és ezek nyilván kielégítik (3)-at. Ezzel beláttuk, hogy a feltételeknek két polinom, a

$$4x-9 \quad \text{és a} \quad 6x^2-30x+24 \text{ tesz eleget.}$$

Dályai Pál, Marosvásárhely

A megoldók száma: 27.

1128. Legyen x_0 tetszőleges egész! Mutassuk meg, hogy az $x_{n+1}=2x_n^2-1$ rekurzióval definiált (x_n) sorozatban az $\dfrac{x_n-1}{3\cdot 2^{n+1}}$ hányados mindig egész szám, bármely egynél nagyobb n-re!

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

Megoldás: A feladat állításánál többet igazolunk: megmutatjuk, hogy minden $n\geqq 2$-re az

$$\frac{x_n-1}{2^{2n-1}x_0^2(x_0^2-1)}$$

kifejezés természetes egész. Teljes indukcióval belátjuk, hogy

$$\mathbf{N} \ni x_n = 2^{2n-1}x_0^2(x_0^2-1)A_n+1,$$

ahol A_n természetes egész.

Mivel $x_1=2x_0^2-1$, ezért $x_2=2x_1^2-1=2(2x_0^2-1)^2-1=8x_0^4-8x_0^2+1$, tehát

$$x_2 = 2^3x_0^2(x_0^2-1)+1,$$

azaz $n=2$-re igaz az állításunk.

Tegyük fel, hogy $x_n=2^{2n-1}x_0^2(x_0^2-1)A_n+1$ $(A_n\in\mathbf{N})$. A rekurziós formula szerint így

$$x_{n+1} = 2x_n^2-1 = 2\left(2^{2n-1}x_0^2(x_0^2-1)A_n+1\right)^2-1 =$$

$$= 2\left(2^{4n-2}x_0^4(x_0^2-1)^2A_n^2+2^{2n}x_0^2(x_0^2-1)A_n+1\right)-1 = 2^{2n+1}x_0^2(x_0^2-1)A_{n+1}+1,$$

$$\text{ahol} \quad A_{n+1} = 2^{2n-2}x_0^2(x_0^2-1)A_n^2+A_n \in \mathbf{N}.$$

Ezzel beláttuk állításunkat.

Az $x_0^2(x_0^2-1)=x_0(x_0-1)x_0(x_0+1)$ alakból látható, hogy az $x_0^2(x_0^2-1)$ kifejezés mind 3-mal, mind 4-gyel osztható, ezért az eredeti állításnál élesebb

$$\frac{x_n-1}{3\cdot 2^{2n+1}} \in \mathbf{N} \text{ is igaz.}$$

Bencze Mihály, Brassó

A megoldók száma: 38.

1129. Adott r sugarú körbe írt háromszögek közül melyiknek van a legnagyobb területű *Morley*-háromszöge, és mekkora ez a terület? (Valamely háromszög Morley-háromszögének egy-egy csúcsa a háromszög szögeinek az oldalakhoz „közelebbi" harmadolóinak közös pontja.)

Mészáros József, Galánta

Megoldás: A *Skljarszkij—Csencov—Jaglom:* Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 2/1, Geometria (Planimetria), Tankönyvkiadó, Bp., 1972., 118-as feladatának megoldásából kiderül, hogy tetszőleges háromszög Morley-háromszöge szabályos, oldalainak hossza pedig $4d \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$, ahol d az eredeti háromszög köré írt körének átmérője, 3α, 3β, 3γ a háromszög szögei.

A Morley-féle háromszög T területe így

$$T = \frac{\sqrt{3}}{4}(4d \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma)^2 = 4\sqrt{3}d^2 \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta \cdot \sin^2\gamma.$$

Mivel $\alpha+\beta+\gamma=60°$ és ezen szögek sinusai pozitívak, ezért

$$\sqrt[3]{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma} \leqq \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3} \leqq \sin 20°,$$

azaz

$$(\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma)^2 \leqq \sin^6 20°.$$

Egyenlőség csak $\alpha=\beta=\gamma=20°$ esetén áll fenn, amikor is az eredeti háromszög szabályos.

Adott r sugarú körbe írt háromszögek közül tehát a szabályosnak van a legnagyobb területű Morley-féle háromszöge, ez a terület pedig $T=16\sqrt{3} \cdot r^2 \cdot \sin^6 20°$.

Bigus Imre, Sárospatak, Csorba Ferenc, Győr, Róka Sándor, Nyíregyháza

A megoldók száma: 18.

1130. Egy $14\times9=126$ mezőből álló T téglalapot hézagmentesen lefedhetünk 9 darab 2×3-as „álló" és 12 db 3×2-es „fekvő" téglalappal (az „álló" téglalap hosszabbik oldala az eredeti téglalap rövidebb oldalával párhuzamos). Bizonyítsuk be, hogy T-nek nincs 10 „álló" és 11 „fekvő" (egybevágó) téglalapból álló feldarabolása!

Kárteszi Ferenc, Budapest

I. megoldás: A T téglalapot két színnel színezzük a következő módon: az oszlopok felváltva legyenek pirosak, illetve kékek. Lesz hét piros és hét kék oszlop. 63 mező kék és 63 mező piros. Az „álló" téglalapok három piros és három kék mezőből állnak; a „fekvő" téglalapok vagy 2 piros és 4 kék, vagy 4 piros és 2 kék mezőből. A 10 „álló" téglalap lefed 30 piros és 30 kék mezőt. Így marad 33 piros és 33 kék mező. A (2—4), (4—2) párosítás miatt a „fekvő" téglalapok által lefedett piros és kék mezők száma páros, tehát a szóban forgó lefedés lehetetlen.

Csete Lajos, Markotabödöge, Kiss Géza, Kisújszállás, dr. Marosvári Péter, Budapest, Steierlein István, Balatonfüred

II. megoldás: T kilenc sora közül az 1, 4. és 7. sort színezzük pirosra (vonalkázzuk), a 2., 5. és 8. sort hagyjuk fehéren, a maradék három sort fessük zöldre (pontozzuk) a borítón levő *1. ábra* szerint.

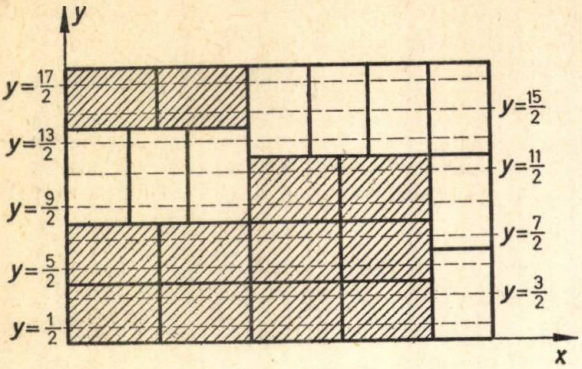
Nyilvánvaló, hogy piros, fehér és zöld mező egyaránt 42 van; bármely felbontásban bármely álló téglalap 2 piros, 2 fehér és 2 zöld mezőből áll. Bármely fekvő téglalap két színnel színezett, 3-3 azonos színű mezőből áll.

Ad absurdum tegyük fel: sikerült felbontani T-t 10 darab álló és 11 darab fekvő téglalapra. Az álló téglalapokban együttvéve 20 piros, 20 fehér és 20 zöld mező van; a fekvőkben pedig 22 piros, 22 fehér és 22 zöld. Mivel egy fekvő téglalapban 3—3 azonos színű mező van, azért a fekvő téglalapokban az azonos színű mezők számának összege szükségképpen osztható 3-mal. A 22 viszont nem osztható 3-mal. Ez az ellentmondás bizonyítja feltevésünk tarthatatlanságát.

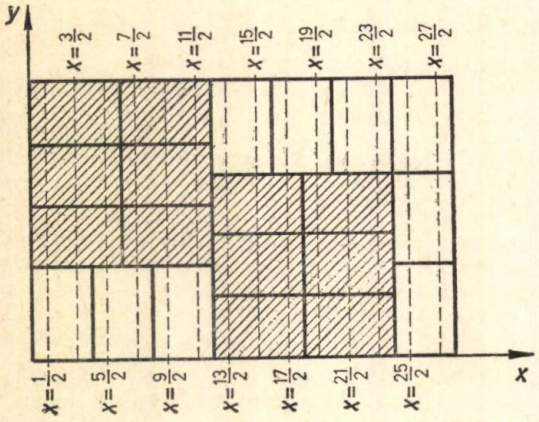
Kamarás Lajos, Pécs

III. megoldás: Válasszuk meg a koordináta-rendszert a *2.* és *3. ábrák* szerint, s rajzoljuk feketére a fekvő téglalapok mezőit, az állókét tekintsük fehérnek! Vegyük fel az x tengellyel párhuzamos

$$y = n+\frac{1}{2}, \quad 0 \leqq n \leqq 8$$



2. ábra



3. ábra

egyenletű 9 egyenest. Ezek mindegyike a téglalapot alkotó négyzetek közül 14-en áthalad, így az összesen 126 elemi négyzet mindegyikén pontosan egy egyenes halad át.

Az egyenesek mindegyike a téglalap belsejében páros számú fehér négyzetet szel át, következésképpen ama fekete négyzetek száma is páros (0, 6 vagy 12), amelyeken egy-egy ilyen egyenes áthalad. A 9 sort így végigpásztázva mindig páros számú — nulla, kettő vagy négy — fekvő téglalapot találunk egymás mellett, ami azt jelenti, hogy a fekvő téglalapok száma páros.

Vizsgáljuk meg az alábbi

$$x=m+\frac{1}{2},\quad 0 \leqq m \leqq 13$$

egyenlettel definiált 14, a téglalap rövidebb oldalával párhuzamos egyenest is!

Egy ilyen függőleges egyenes 9 négyzeten megy át a téglalap belsejében úgy, hogy a 14 egyenes valamelyike áthalad a téglalapot alkotó egy—és csakis egy — négyzeten *(3. ábra)*. A paritás miatt ezen egyenesek mindegyike nulla vagy 6 fekete négyzetet fog átszelni, azaz egymás alatt nulla vagy 3 fekvő téglalapot találunk, bármelyik függőleges egyenes mentén számoljuk is össze őket.

Előző megállapításunkkal összevetve azt kaptuk: a fekvő téglalapok száma egy 6-tal osztható szám: 0, 6 vagy 12. 11 fekvő téglalap tehát nem szerepelhet egyetlen felbontásban sem, a 6 vagy 12 fekvő téglalap viszont többfajta elrendezést alkothat.

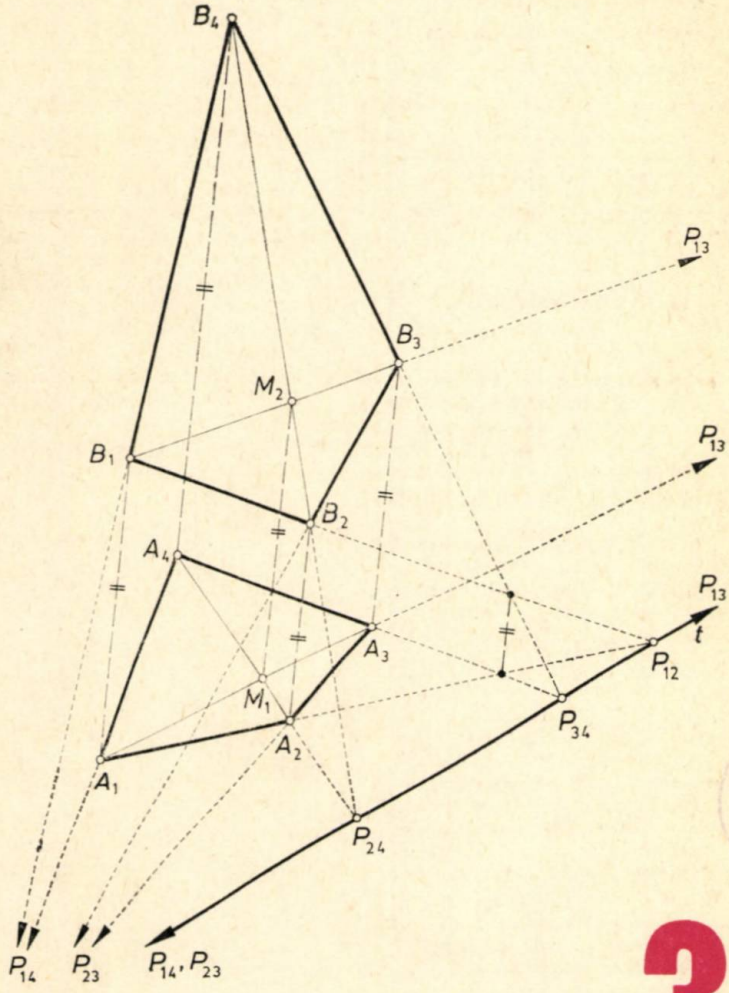
Kiss Zoltán, Pécs,
Szánthó Gyula, Gyula

A megoldók névsora (1125—1130.)

Bagi Gábor, Barcs (1126., 1128.), Balogh Imre, Szombathely (1125., 1128.), Bege Antal, Csíkszereda (1125., 1126. 2 mód, 1127., 1128. 2 mód, 1130.), Bencze Mihály, Brassó (1125—1130.) Bigus Imre, Sárospatak (1125—1130.), Boda Miklós, Pécs, (1126., 1128.), Bokros Szilárd, Pécs (1126., 1128.), Cseh László, Székelyudvarhely (1125—1128.); Csepreginé Ambrus Gabriella, Budapest (1125., 1126., 1128.), Csete Lajos, Markotabödöge (1125., 1126. 3 mód, 1127—1130.), Csorba Ferenc, Győr (1125—1130), Dályay Pál, Marosvásárhely (1125—1130.), Hajna János, Pécs (1125—1128.), Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1125., 1126. 2 mód, 1127—1130.), Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (1125—1128., 1130.), Kamarás Lajos, Pécs (1125—1130.), Kiss Géza, Kisújszállás (1125—1130.), Kiss Zoltán, Pécs (1125—1128., 1130.), Kosztolányi József, Szeged (1125—1128.), Kovács Antal, Kézdivásárhely (1125—1128.), Kovács Béla, Szatmár (1126., 1128.), Kovácsné Gajdács Ibolya, Budapest (1128); dr. Marosvári Péter, Budapest (1125., 1126., 1128., 1129., 1130. 2 mód) Merényi Imre, Börvely (1125—1128.), Mészáros József, Galánta (1125—1129.), Mike János, Szeged (1125—1129.), Pethes Gergely, Nagykároly (1125—1128., 1130. 2 mód), Róka Sándor, Nyíregyháza (1125—1130.), Sándor József, Farcád (1125—1130.), Steierlein István, Balatonfüred (1125., 1127., 1128., 1130.), Szabó Jánosné, Békéscsaba (1125., 1126., 1128.), Szánthó Gyula, Gyula (1125—1130.), Székely Szabolcs, Székelyudvarhely (1127., 1128.), Szoldatics József, Kapuvár (1126. 2 mód, 1127—1129.), Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (1125—1130.), Udvari Tibor, Baja (1125—1130.), Vágóné Roland Katalin (1125., 1126., 1128.), Váradi József, Gelence (1125., 1126., 1129., 1130.); Varga István, Nagyszalonta (1126. 2 mód, 1127., 1128. 2 mód, 1129.), Vincze István, Szeged (1126., 1128.), Zalán Péterné, Budapest (1126., 1128.)

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1987. augusztus * XXXIV. évfolyam 3 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

87-1236 — Szegedi Nyomda — F. v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS

A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban, példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
a) személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését, *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal, (nyugdíjasok törzsszámukat).

TARTALOM

Dr. Bárány Ottóné—Nagy Ferencné—Dr. Sümegi Lászlóné: Javasolt tanmenet matematikából az általános iskola 7. osztálya számára 65
Dr. Gódor Győzőné Sergyán Stefánia: Logikai feladatokról 75
Dr. Koska Árpád: Térbeli ívmetszés megoldása és programozása COMMODORE—64 típusú számítógépre 82
FELADATOK 90
ÚJ KÖNYVEK IV

СОДЕРЖАНИЕ

д-р Барань Оттоне—Надь Ференце—д-р Шумеги Ласлоне: Рекомендуемый учебный план по математике для 7 класса общеобразовательной восьмилетней школы 65
д-р Годор Дьёзоне Шердян Штефания: О логических задачах 75
д-р Кошка Арпад: Решение трёхдимензионного пересечения дуг и его программирование на ЭВМ тила Коммодор-64 82
ЗАДАЧИ 90
НОВЫЕ КНИГИ IV

INHALT

Frau Györgyi Bárány (geb.: *Badi*)—*Frau Rozália Nagy* (geb.: *Szabó*)—*Frau Margit Sümegi* (geb.: *Sal*): Eine vorgeschlagene Einteilung des Lehrstoffes Mathematik in Lerneinheiten für die 7. Klasse der Grundschule 65
Frau Stefánia Gódor (geb.: *Sergyán*): Über logische Aufgaben 75
Dr. Koska, Árpád: Auflösung des Schnittes von Bögen im Raum und deren Programmierung an den Computer vom Typ COMMODORE—64 82
AUFGABEN 90
NEUE BÜCHER IV

DR. BÁRÁNY OTTÓNÉ—NAGY FERENCNÉ—DR. SÜMEGI LÁSZLÓNÉ
szakvezető tanárok szakfelügyelő
Debrecen

Javasolt tanmenet matematikából az általános iskola 7. osztálya számára

Az 1986/87-es tanévben a matematika-tanterv korrekcióját teljes szélességében még nem vehetjük figyelembe, hiszen a rendelkezésünkre álló dokumentumok a tananyag átcsoportosítását nem teszik lehetővé. Szükségesnek látszik viszont az eddigi feszített munkaütem csökkentése, a tananyagban való alaposabb elmélyülés, a fokozott gyakorlás.

Ez a cél lebegett a szemünk előtt, amikor olyan (javasolt) tananyagbeosztást készítettünk a 7. osztályos matematika tanításához, amely a korrekciót *mélységében* veszi figyelembe. Munkánk során arra törekedtünk, hogy *csak* a rendelkezésünkre álló dokumentumokra támaszkodva oldjuk meg az előzőleg jelzett feladatot. Ezért a tankönyv és munkalapok feladatanyagát beépítettük az egyes órák anyagába.

Külön jelzéssel láttuk el a differenciált munkára javasolt feladatokat — [□] —, valamint a megjegyzéseinket, a figyelemfelkeltést — (□) —.

Abban a reményben adjuk közre tananyag-beosztás javaslatunkat, hogy kollegáink terhén könnyíteni tudtunk.

Az óra sorszáma	Aktuális tananyag (kiegészítő jellegű anyagrészek) koncentráció, ismétlés, gyakorlás	Útmutatások
I. ISMÉTLÉS. HATVÁNYOZÁS. SZÁMELMÉLET 21+2 óra		
1.	*Alapműveletek racionális számokkal.* — A négy alapművelet elvégzésének algoritmusa *a)* egész számok körében; *b)* tört számok körében (tizedes törtek is). — A műveletvégzés szabályainak megfogalmazása.	Tk. 6./**9—14.**, 7/**15., 16.**, 9/**28.**, 9/**30—32.**, 10/**33., 34.**, 13/**53.**, 15/**62., 63.**, 14/**54.**
2.	*Alapműveletek racionális számokkal.* — Műveletek sorrendje. Zárójelhasználat. — Algebrai kifejezések számértékeinek kiszámítása a négy alapművelet gyakorlására. — Adott függvénykapcsolatok alapján értéktáblázat és grafikon készítése.	Tk. 12/**42.**, 13/**52.**, 15/**64., 65.**, 56/**1—6.**, 8/**20.**, 10/**36.**, 11/**37.**, 14/**55.**
3.	*Mennyiségek törtrészének kiszámítása, az arány fogalma.* — Mennyiségek törtrészének kiszámítása. — A tört mint két szám aránya. — Számok aránya, kifejezése tört, tizedes tört és százalék alakban. — Törtek bővített alakja, az aránypár fogalma.	Tk. 8/**25.**, 11/**38., 40.**, 12/**41.**, 9/**26., 29.**, 14/**61.**, 16/**74., 69.**, 17/**88.** Ml. **8/2., 9., 13/3.**
4.	*Feladatok az arányos osztásra.* — Több szám aránya.	Tk. 16/**70—63.**, 62/**68., 60., 63.**

Az óra sorszáma	Aktuális tananyag (kiegészítő jellegű anyagrészek) koncentráció, ismétlés, gyakorlás	Útmutatások
	— Több szám kiszámítása összegükből vagy különbségükből és arányukból (geometriai feladatok is). — Egyszerű szöveges feladatok megoldása következtetéssel.	
5.	*A százalékszámítás alapfogalmai.* — Tört, arány, százalék kapcsolata. — Alap, százalékláb, százalékérték fogalma. — Egyszerű százalékszámítási feladatok következtetéssel, törtek, tizedes törtek szorzásának, osztásának alkalmazásával.	Tk. 9/**27.**, 11/**39.**, 14/**57—60.** Ml. **8/1.** Tk. 15/**66.**, **67.**, 16/**68.** (17/**91.**)
6.	*Százalékszámítási feladatok.* — Összetett feladatok megoldása (geometriai is).	Tk. 18/(**97.**), **98.** Ml. **10—12.**
7.	*Egyenes arányosság.* — Az egyenes arányosság fogalma. — Az egyenes arányosság mint függvény. — Egyszerű, gyakorlati vonatkozású feladatok megoldása következtetéssel (geometriai, fizikai is).	Tk. 16/**75.**, **80—83.** Ml. **17.**, **18/1.**
8.	*Fordított arányosság.* — A fordított arányosság fogalma. — A fordított arányosság mint függvény. — Egyszerű, gyakorlati vonatkozású feladatok megoldása következtetéssel (geometriai, fizikai is).	Tk. 16/**76—79.**, **84.**, 17/**85.** 6. o. Fr.
9.	*Összetett arányossági feladatok.* — Összetett következtetések arányossága kapcsolatban — Összetett szöveges feladatok megoldása (geometri . s)	Tk. 60/**35—38.**, 61/**51—56.**, 62/**57—59.**, Ml. **13/1., 2.** 6. o. Fr.
10.	*Nyitott mondatok.* — Nyitott mondat, egyenlet, egyenlőtlenség fogalma. — Igazsághalmaz, alaphalmaz. — Azonosság, azonos egyenlőtlenség.	Tk. 7/**17—19.**, 10/**35.**, 15/**64.**, **65.**, 8/**22.**, 59/**26.**, **27.**
11.	*Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása.* — A mérlegelv, illetve a lebontogatás lépései. — A mérlegelv, illetve a lebontogatás alkalmazása *egyszerű* egyenletek, illetve egyenlőtlenségek megoldása során.	Tk. 8/**23.**, 13/**51.** Ml. **57.** Tk. 60/**28.**, **29.**
12.	*Egyenlet, egyenlőtlenség lejegyzése a szöveg alapján.* — A nyitott mondat felírása és megoldása. — Becslés, ellenőrzés. — A tanult azonosságok alkalmazása.	Tk. 12/**45—48.**, 18/**100.**, 17/**90.**, 60/**30.** Ml. **2.**
13.	*Hatvány.* — A hatvány fogalma. — Műveletek hatványokkal (egyszerűbb esetekben). — Egyenlő alapú hatványok szorzata, illetve hányadosa. [Kiegészítő anyag: 0 és negatív kitevőjű hatványok.]	Tk. 68—72., 75—82., 98/**1.**, **2.**, 99/**4.**, **9.**, **10.**, 98/**6—8.**, 101/**42.**, 102/**45.**
14.	*A műveletek sorrendje.* — A hatványozás gyakorlása. (Négyzet területe; kocka, négyzetes oszlop térfogata.)	Tk. 99/**10.**, **11.**, 100/**20.**, **29.**, 101/**30—39.**,

Az óra sorszáma	Aktuális tananyag (kiegészítő jellegű anyagrészek) koncentráció, ismétlés, gyakorlás	Útmutatások
	— Zárójelbontás, törtvonal szerepe.	**43.**, 102/**44.**, 102/**51—53.**
15.	*Számelméleti alapismeretek.* — Törzsszám, összetett szám. — Számok prímtényezős alakja. — Osztó, többszörös, közös osztó, közös többszörös fogalma. — Oszthatósági szabályok.	Tk. 72—73., 100/**15—19.**, **21—25.**, 101/**40.**, **41.** Ml. **84/2.**, **121.**
16.	*Közös osztók, közös többszörösök.* — Közös osztók, közös többszörösök keresése a számok prímtényezős alakjának felhasználásával. — Legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös keresésének *általános szabálya.*	Tk. 73., 74., 100/**25—28.**, 62/**75.**, 63/**76.**
17.	*Gyakorló óra.* — Legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös keresésének gyakorlása, alkalmazásuk a törtekkel végzett műveletek során.	Tk. 101/**43.** Ml. **81/3—82/2.**, **85/2.** (A 15., 16. órából kimaradt feladatok. Hf. a köv. órára Ml. **114.**)
18.	*A számok normálalakja. Közelítő számítások.* — Kerekítés, közelítő értékekkel történő számolás. — Becslés. — Számolás 10 hatványaival. — Normálalak.	Tk. 85—86. 102/**50—53.**, **57.** Ml. **81.**, **82.**
19.	*Kerület- és területszámítás.* (Ha nem tanították volna a kör kerületét és területét a 6. osztályban.) — A tanult síkidomok kerületének és területének kiszámítása (tükrös háromszögek, négyszögek, kör). — Mértékegységek átváltása (hosszúság, terület).	Tk. 242., 243., 251/**73.**, 254/**95.**, **97.** *a)*, **99.** *a)*, 266/**208.**, **209.**, 267/**223.**, 268/**224.**, **225.** 6. o. Fr. II. 621, 622.
20.	*Összetett geometriai feladatok.* — A tanult testek felszínének és térfogatának kiszámítása (egyenes hasáb, az alapja ismert síkidom). — Összetett feladatok megoldása, az arány és a százalékszámítás alkalmazása geometriai témájú feladatokban.	Tk. 267/**218.**, **221.**, 266/**210—217.**, 60/**42.**
21.	*Gyakorló óra.* Az I. felmérő dolgozat előkészítése.	
22., 23.	Az I. felmérő dolgozat íratása, javítása.	
II. GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK. THALÉSZ TÉTELE. AZONOSSÁGOK. 28+2 óra		
24.	Tengelyes tükrözés tulajdonságai, végrehajtása. Tengelyesen tükrös alakzatok.	Tk. 243/**1—7.** 145—147. Ml. **32.**
25.	Tengelyes tükrözések egymás utáni végrehajtása két párhuzamos tengely esetén. Az eltolás fogalma. Egyállású szögek.	Tk. 159., 145/**5.** Ml. **33.**, **34.**

Az óra sorszáma	Aktuális tananyag (kiegészítő jellegű anyagrészek) koncentráció, ismétlés, gyakorlás	Útmutatások
	— Alakzatok körüljárása. — Az eltolás nagysága és a tengelyek egymástól való távolsága közötti összefüggés megfigyeltetése. Az eltolás iránya. (Megfigyeltetés.)	
26.	Tengelyes tükrözések egymás utáni végrehajtása két, egymásra merőleges tengely esetén. Középpontos tükrözés és tulajdonságai. — A körüljárás vizsgálata. — Ábrázolás koordináta-rendszerben. — A középpontos tükrözés és síkbeli 180°-os elforgatás kapcsolata.	Tk. 244/**12., 13.**, 149/**2.** Ml. **35.** Tk. 150—157. (253/**80.**).
27.	A középpontos tükrözés végrehajtása és a tulajdonságok vizsgálata (pont, szakasz, egyenes, háromszög tükrözése).	Tk. 244/**14—20.** Ml. **31/1., 32.**
28.	Szögek középpontos tükrözése (fordított állású szögek, kiegészítő szögek). — Az egyenes középpontos tükrözése.	Tk. 244/**23—27.**, 158—161.
29.	A középpontos tükrözéssel kapcsolatos feladatok gyakorlása. [Kiegészítő anyag: két — tetszőleges nagyságú szöget bezáró — tengelyre való tükrözés egymás utáni végrehajtása.] Elforgatás.	Tk. 244/**21., 22.**
30.	Középpontosan tükrös alakzatok. Középpontosan tükrös és tengelyesen tükrös alakzatok összehasonlítása. — Szabályos sokszögek tulajdonságai. — Vizsgálódás egyszerű térelemek esetén is. (pl. 2 pont, 3 pont, egyenes, párhuzamos egyenesek, szakasz stb.)	Tk. 161—165. feladatai.
31.	Középpontosan tükrös négyszögek. A paralelogramma származtatása, tulajdonságai a középpontos tükrözés alapján. — A középpontos tükrözés tulajdonságai. Párhuzamos szárú szögek.	Tk. 166. 248/**55., 56.**, 249/**64.**, 250/**65., 67.**, 251/**70., 71.**
32.	Speciális paralelogrammák tulajdonságai, ezekre vonatkozó állítások bizonyítása. Ha, akkor... típusú állítások gyakorlása. Megfordítható, meg nem fordítható állítások. — Állítások igazságának eldöntése (bizonyítás). — Tengelyes és középpontos tükrözés tulajdonságai.	Tk. 167—168. 103/**140.**, 248/**58., 59.**, 249/**63.**, 250/**69.**, 270/**238.**, 253/**81.**
33.	A paralelogramma szerkesztése középpontos szimmetria alapján. (Csak olyan adatokat adjunk meg, amelyek ezt a lehetőséget tartalmazzák!)	Tk. 249/**62.**, 254/**95., 96.**, **100.** *a), c)*, **101.** *d)*, (**100.** *b), d)*, **101.** *a), b), c)*).
34.	A paralelogramma kerülete, területe átdarabolással és a szabály megfogalmazása. — Párhuzamos egyenesek távolsága — a paralelogramma magassága.	Tk. 260/**158.**, 261/**159.**, Tk. 230—233.
35.	Szerkesztési és számítási feladatok. — Középpontos tükrözés.	Tk. 261/**160—167.**, 263/**181., 182.**,

Az óra sorszáma	Aktuális tananyag (kiegészítő jellegű anyagrészek) koncentráció, ismétlés, gyakorlás	Útmutatások
	— Paralelogramma.	**184.,** 268/**228.**
36.	Szabályos sokszögek. Középpontosan szimmetrikus sokszögek. — Minden, van olyan... típusú állítások gyakorlása. — Halmazba rendezés adott szempont szerint. — Szabályos sokszögek szögei. — Középponti háromszögek.	Tk. 168—169., 245/**27., 28.,** 268/**232.,** 269/**233.**
37.	Azonos tulajdonságú ponthalmazok (szakaszfelező merőleges, szögfelező, körök, egyenesek, kör és egyenes kölcsönös helyzete, ponthalmazok távolsága, a kör szimmetriája).	Ismétlés. Tk. 169—171., 245/**29., 30., 31.**
38.	Thalész-tétel és bizonyítása. (Tengelyes és középpontos szimmetria a körben.) (A téglalap tulajdonságai.)	Tk. 172—174. Ml. **28., 29.,** (Ml. **30.**) Tk. 253/**83.**
39., 40.	Szerkesztések és bizonyítások Thalész tétele alapján. — Derékszögű háromszög szerkesztése. Körhöz külső pontból érintő szerkesztése. Érintőszakasz. Érintőnégyszögek. — A deltoid tulajdonságai (az érintőszakaszok egyenlősége kapcsán).	Tk. 174., 175., 248/**60.,** 249/**61.,** 245/**32., 33.,** 246/**40.,** 247/**41—49.,** 255/**104., 105.**
41.	Két vagy több egyenest érintő körök. (Párhuzamos egyenespárt, illetve metsző egyenespárt érintő körök.) — Távolságok. — Kiegészítő szögek szögfelezői (megfigyeltetés). — Középpárhuzamos.	Tk. 176., 177., 245/**34., 35.,** 246/**36—38.,** 248/**54.**
42.	Tudáspróba — hiányosságok pótlása.	
43.	*Azonosságok.* Algebrai kifejezések, szorzat-, összegalak, együttható, egynemű és különnemű kifejezések. Egyneműek összevonása. — Szöveges feladatokban előforduló mennyiségek lejegyzése algebrai kifejezéssel. Geometriai feladatok is!	Tk. 21—25. feladatai
44., 45.	Az összeg, a különbség hozzáadása, kivonása. Az azonosság alkalmazása egyenletek megoldásában. — Az ellentett fogalma. — Az összeg, a különbség változásai. Egyszerű szöveges feladatok.	Tk. 23., 60/**31—34.,** 61/**44—46.,** 60/**39—43.,** 62/**62., 64., 65.**
46., 47.	Összeg, különbség szorzása és osztása, szorzat szorzása. Algebrai kifejezés (korrekció!) szorzása csak racionális számmal. Szorzat felírása összegalakban. A zárójel felbontása, kiemelés. Azonosságok alkalmazása egyenletek megoldásában. — Síkidomok területe. Geometriai modell. — Azonosság alkalmazása törtek egyszerűsítésekor, bővítésekor (ha a számláló összeg). — Műveletek tulajdonságai. — Az eddig tanult azonosságok gyakorlása.	Tk. 26—27., 62/**66—74.,** 63/**77.,** 58/**17.** Ml. **54/1.** Tk. 58/**16., 18.**
48.	Összeg szorzása összeggel (az egyik tényező lehet kettőnél több tagú is). — Geometriai modell — területszámítások. (Differenciált munkára — térfogatvizsgálat.) — Ellenőrzés behelyettesítéssel (helyettesítési értékkel).	Tk. 57/**7—10.,** 58/**11—13.,** 58/**14.** Ml. **56/1.** Tk. 27—30.

Az óra sorszáma	Aktuális tananyag (kiegészítő jellegű anyagrészek) koncentráció, ismétlés, gyakorlás	Útmutatások
49.	Algebrai törtek helyettesítési értékének kiszámítása. [Kiegészítő anyag: nevezetes szorzatok.]	Tk. [59/19—25.], 31—33. Ml. 56/2., [55.]. Tk. 67/106., 107.
50.	Gyakorlás. Algebrai kifejezések helyettesítési értékének kiszámítása és egyenletmegoldás. A tanult azonosságok differenciált gyakorlása. Diagnosztizáló teszt írása.	Tk. 58/15. Ml. 54/2.
51.	Összefoglalás. Az esetleges hiányosságok pótlása.	
52., 53.	II. felmérő dolgozat írása és javítása.	
III. FÜGGVÉNYEK, NYITOTT MONDATOK 20+2 óra		
54.	Nagysági relációk és egyéb kapcsolatok, koncentráció a matematikán belül (pl. osztója, kisebb nála; maradékos osztás, egyértelmű és nem egyértelmű hozzárendelések). — A koordináta-rendszer (felelevenítés).	
55.	A függvény mint egyértelmű hozzárendelés. — A függvény megadása: szöveggel, táblázattal, grafikonnal, képlettel. — A függvény értelmezési tartománya, értékkészlete. — A függvény ábrázolása (egyenes és fordított arányosság).	Tk. 63/81—83. 6. o. Fr. 268/230. (Ml. 122.)
56.	Adott szabály alapján értéktáblázat készítése és a függvény ábrázolása (abszolútérték-függvény és a másodfokú függvény is, elegendő az $x \to \|x\|$, $x \to x^2$). — A lineáris függvény fogalma.	Tk. 33—38., 14/56.
57., 58.	A lineáris függvény grafikus ábrázolása, menetének vizsgálata. — Az $ax+b$ alakú függvényben a és b szerepének vizsgálata. Egyenes arányosság, konstans függvény. A halmazszemlélet erősítése.	Tk. 39—42., 64/86—88., 91., 93., 94.
59.	Gyakorló óra: — szöveggel megadott függvénykapcsolatok lejegyzése, — egyenlettel megadott függvény vizsgálata, — grafikon alapján táblázat készítése és szabály keresése.	Tk. 63/84., 64/85., 65/95—97.
60.	Két lineáris függvény értékeinek összehasonlítása azonos független változó esetén. (Az egyenlőtlenség grafikus megoldásának előkészítése.)	Tk. 64/89., 90., 92.
61., 62.	Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása. A kisebb, nagyobb, egyenlő reláció ugyanazon két függvény esetén ($a_1x+b_1 \lessgtr a_2x+b_2$). Az igazsághalmaz ábrázolása számegyenesen.	Tk. 46—48., 66/99—101., 67/108., 109.
63.	Gyakorló óra. Differenciált munkára javasolt: olyan egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása, ahol az egyik oldalon másodfokú, illetve abszolútérték-függvény van. Szöveges feladatok is!	Tk. 42—45., 47., 66/98., 102—104., 67/105., 110—112.
64.	Egyenletek megoldása mérlegelvvel. Azonos átalakítást is igénylő feladatok. Szöveges feladatok is. (Az ellenőrzés fontosságára felhívni a figyelmet!)	Tk. 48., 49., 67/113—115., 66/99—101., 61/47., 48. Ml. 115.

Az óra sorszáma	Aktuális tananyag (kiegészítő jellegű anyagrészek) koncentráció, ismétlés, gyakorlás	Útmutatások
65.	Egyenlőtlenségek megoldása: mindkét oldal szorzása (osztása) negatív számmal. Összehasonlítás az egyenletek megoldásmódjával. Egyenlőtlenségek ellenőrzése.	Tk. 50., 51. Ml. **105., 120.**
66., 67., 68.	Egyenletek, egyenlőtlenségek algebrai megoldása. Szöveges feladatok. Becslés, ellenőrzés fontossága. A tanult azonosságok alkalmazása.	Tk. 51—55., 63/**78—80.**
69., 70.	Gyakorlás. Egyenletek algebrai és grafikus megoldása. Szöveges feladatok.	Ml. **58.** *a)—h).* grafikusan megoldott feladatok ellenőrzése algebrailag. Ml. **60.** Tk. 62/**57—75.**, meg nem oldott feladatok. 53/**76—81.**
71.	Diagnosztizáló teszt íratása, javítása.	
72.	Összefoglalás. (Függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek.)	
73.	III. felmérő dolgozat előkészítése. Hiányosságok pótlása.	
74., 75.	III. felmérő dolgozat írása, javítása.	
IV. SOKSZÖGEK. 27+2 óra		
76.	A sokszögekről tanultak ismétlése, rendszerezése. A témához kapcsolódó kombinatorikai feladatok. Halmazszemlélet fejlesztése.	Tk. 269/**236., 237.**, 270/**239., 240.**, 272/**75.**
77.	A háromszögekről tanultak ismétlése, tükrös háromszögek, ezek tulajdonságai, szerkesztésük.	Tk. 269/235. 255/**103.** *a), c), f).* (253/80., 255/**108.**)
78.	Kapcsolat a háromszög szögei között. (A háromszög belső és külső szögeinek összege, a belső és külső szögei közti kapcsolat.) A sokszögek belső és külső szögei. Bizonyítások. (Szögpárok. Középpontos tükrözés.)	Tk. 183., 251/**72.**, 252/**78.**
79.	Kapcsolat a háromszög oldalai között, valamint oldalai és szögei között. A háromszög szerkeszthetőségének vizsgálata a három oldal hosszának ismeretében.	Tk. 184—187., 253/**84—88.**
80.	Az alapszerkesztések felelevenítése. A háromszögek szerkesztésének alapesetei (három oldal, a két oldal és a közbezárt szög ismeretében).	Tk. 192—196., 253/**89.** *a)*, **90.** *a)*, 254/**102.** *a), d)*, 255/**103.** *a)*
81.	A háromszögek szerkesztésének további alapesetei (egy oldal és két szög, két oldal és a nagyobbik oldallal szemközti szög ismeretében).	Tk. 196—201., 254/**91.** *a)*, **102.** *b), c), e)*, 255/**103.** *b), f).*
82.	A háromszögek egybevágósága, az egybevágóságuk feltételei. Szerkesztési feladatok. (Vázlat — feltételek — szerkesztés.)	Tk. 195—201.
83.	Azonos tulajdonságú ponthalmazok keresése. A háromszögek szögfelezői, a háromszögbe írható kör. A háromszögek szögfelezői metszéspontjára vonatkozó tétel bizonyítása.	Tk. 187., 180., 181., 252/**76., 77.**, (252/**79.**), 253/**89.**, 252/**74.**, (255/**109.**).

Az óra sorszáma	Akutáils tananyag (kiegészítő jellegű anyagrészek) koncentráció, ismétlés, gyakorlás	Útmutatások
84.	Azonos tulajdonságú ponthalmazok keresése. A háromszögek oldalfelező merőlegesei. A háromszög köré írható kör. A háromszög oldalfelező merőlegeseire vonatkozó tétel bizonyítása.	Tk. 188—189., 253/**90.**, 254/**91., 92.**
85.	A háromszög magasságai. (A pont és egyenes távolsága.) Kiegészítő anyag: a háromszög magasságegyeneseire vonatkozó tétel bizonyítása.	Tk. 189—191.
86—88.	Szerkesztési feladatok megoldása a háromszög nevezetes egyeneseinek segítségével. Szerkeszthetőségi feltételek további vizsgálata. Diszkusszió. Thalesz-tétel, a háromszögek egybevágósága. Diagnosztizáló teszt írása.	Tk. 254/**93., 94., 102.** *f), g).*, 255/**103.** *d), e), g).*, 255/**106.**, (255/**107**), [256/**110—113.**]. Ml. **125.**
89.	A háromszög területének kiszámítása átdarabolással, kiegészítéssel. Az általános szabály megfogalmazása. (Vetessük észre a tanulókkal, hogy a különböző átdarabolások során kapott összefüggések egyenlősége a szorzat asszociatív tulajdonságait tükrözi.)	Tk. 233., 234., 262/**173., 174.**
90., 91.	Feladatok a háromszögek területének, kerületének kiszámítására. (Aránnyal, százalékkal, egyenlet megoldással kapcsolatos feladatok is.)	Tk. 262/**175—179.**, (263/**180., 183.**), 268/**229.**
92.	A négyszögekről tanultak ismétlése. Rendszerezés, osztályozás adott tulajdonság szerint. (Halmazelméleti ismeretek felhasználása.)	Tk. 261/**169.**, 269/**233., 234.**
93.	Paralelogramma szerkesztése háromszög szerkesztés felhasználásával. (Feladatok a kerület, a terület számítására.) Szerkesztése középpontos tükrözéssel is.	Tk. 201—203. 254/**100., 101.**, 261/**168., 170—172.**
94.	A trapéz meghatározása és a meghatározásból következő tulajdonságok. Elhelyezése a négyszögek halmazában. Ha ..., akkor ... állítások vizsgálata. Ismétlés: húrtrapéz, speciális trapézok.	Tk. 250/**68.**, 269/**233.**, 270/**238.**
95.	A trapéz szerkesztése háromszög szerkesztés felhasználásával.	Tk. 254/**97.**, 203—205.
96.	A trapéz területének kiszámítása. Átdarabolás, kiegészítés, az általános szabály megfogalmazása, alkalmazása.	Tk. 235., 236., 263/**185.**
97.	Gyakorló óra. Trapézok szerkesztése, területe. Az adatok megadása során arány, százalék, törtrész számítására is kerüljön sor. Speciális trapézok szerkesztése, területe, kerülete.	Tk. 254/**98.**, 263/**186.**, 264/**187—192.** Ml. **126.2.**
98.	Deltoid szerkesztése, területe, kerülete. Általános négyszög szerkesztése, kerülete, területe. Ismétlés: háromszögek szerkesztése.	Tk. 236., 237., 254/**99.**, 261/**169.**
99.	Sokszögek területének kiszámítása háromszögekre vagy ismert területű négyszögekre való darabolással, közelítéssel. Egy csúcsból húzható átlók száma.	Tk. 235., 268/**224—227.**, 258/**145.** Ml. **102., 103., 128.**, **77.** *f).*
100.	Szabályos sokszögek tulajdonságai, szerkesztésük, kerületük, területük. Középponti háromszögek.	
101.	Diagnosztizáló teszt íratása, javítása.	

Az óra sorszáma	Aktuális tananyag (kiegészítő jellegű anyagrészek) koncentráció, ismétlés, gyakorlás	Útmutatások
102.	Összefoglalás.	Ml. **74.**
103., 104.	IV. felmérő dolgozat íratása, javítása.	

V. PITAGORASZ TÉTELE. SOROZATOK. HASONLÓSÁG. VALÓSZÍNŰSÉG, KOMBINATORIKA. 26 óra

105.	Számok négyzete, négyzettáblázat használata. (1—10 közé eső számok négyzete.) A négyzet, a kör, az egyenlő szárú derékszögű háromszög területe, a kocka felszíne (zsebszámológép). Mértékátváltások.	Tk. 83., 102/**57.**
106.	Adott területű négyzet oldalának meghatározása. Négyzetgyök fogalma. Négyzetgyök kikeresése táblázatból. 1—100 közé eső számok négyzetgyökének meghatározása (próbálgatás, táblázat, zsebszámológép).	Tk. 87—90., 93. Ml. **75.**
107.	Gyakorló óra. A fogalom erősítése érdekében az $x \to \sqrt{x}$ függvény vizsgálata. (Irracionális szám fogalma.)	Tk. 91., 92., 94., 95., 102/**56.**, **55.** *a)—f).* Ml. **76.**
108.	Pitagorasz-tétel. A tétel igazolása átdarabolással. Többféle módon is! Ismétlés: számok négyzete, derékszögű háromszög, a négyzet területe.	Tk. 205—209., 257/**121.** Ml. **78., 79.**
109.	Az összefüggés megfigyeltetése a hegyesszögű, derékszögű, tompaszögű háromszögek oldalainak négyzete között. Pitagoraszi számhármasok (egyszerűbb esetek).	Tk. 209—211., 257/**122., 123.**
110., 111.	Pitagorasz tételének alkalmazása egyszerű geometriai számításokban. Terület-, felszín-, térfogat-számítások. (Két pont távolságának kiszámítása a koordináta-rendszerben.)	Tk. 257/**124—133.**, 256/**114—119.**, 257/**120.**, 264/**193.**, 265/**194.** Ml. **126.3.**, [Ml. **126.4.**].
	Sorozatok.	
112.	A sorozat mint függvény. (Ugyanannak a függvénykapcsolatnak a vizsgálata különböző alaphalmazokon, különböző tartalommal.) (Kapcsolat a fizikával.)	Tk. 104—106., 112/113., 133/**20.**, **21.**, 137/**44.**, 138/**45.**, **46.**
113., 114.	Sorozatok építése mindkét irányban, szabályok keresése. (Sokféleségre törekedjünk.) Sorozatok folytatása adott, illetve felismert szabályok alapján.	Tk. 117., 104., 132/**1—3.**, 136/**37.**, 139/**48.**, **49.**, 138/**45.**, 134/**22.**, **23.**, 133/**4—7.**
115.	Számtani sorozat. Törvényszerűségek megfigyeltetése, lejegyzése. (A hangsúly a matematikai tartalmon legyen.) Szöveges feladatok, kapcsolat a valósággal. A számtani sorozat, mint függvény.	Tk. 107—111., 113—116., 134/**24.**, **25.**, 133/**8—10.**
116.	Mértani sorozat. Törvényszerűségek megfigyeltetése. (*n*-edik tag. Itt is a matematikai tartalom a lényeg.) A mértani sorozat mint függvény.	Tk. 118—121., 135/**29—32.**

Az óra sorszáma	Aktuális tananyag (kiegészítő jellegű anyagrészek) koncentráció, ismétlés, gyakorlás	Útmutatások
117.	Gyakorló óra. Egyenletek megoldása. Szöveges feladatok.	Tk. 133/**11—19.**, 134/**26., 27.**, 135/**34., 35.**, 136/**40., 41.**, 136/**38., 39.**
	Hasonlóság.	
118.	Geometriai transzformációk. (Egybevágósági transzformációk.) Pont-pont hozzárendelések. Hozzárendelési szabályok megfogalmazása adott rajz alapján. Egyszerűbb transzformációk koordináta-rendszerben.	Tk. 212—216.
119.	Aránytartó transzformációk megfigyeltetése. Hasonlóság. Ismétlés: az arány.	Tk. 216—221. 258/**142., 145.**, Ml. **92.**
120., 121.	A háromszögek hasonlóságának alapesetei. (Az egybevágóság mint a hasonlóság speciális esete.) Hasonló háromszögek szerkesztése. A szakasz egyenlő részekre való osztása.	Tk. 225—227., 257/**136.**, 258/**138—141.**, **143., 144.**, 259/**147., 149.**, 260/**151., 152.**, **154—157.**
122.	Szakasz felosztása adott arány szerint. Háromszögek nagyítása, kicsinyítése. (Tájékozódás a térképen.) Párhuzamos szárú szögek.	Tk. 228—230., 257/**134., 135.**, 258/**143., 144.**, 259/**150.**
123.	Hasonló síkidomok, hasonló alakzatok. Kör, szabályos sokszögek, szabályos testek.	Tk. 222—225., 226—228., 258/**137.**, 265/**197., 201.**, 270/**243.**, 259/**146.**
124.	Hasonló síkidomok kerülete, területe. Az összefüggés felismertetése, tapasztalatgyűjtés ábrák segítségével. Egyszerűbb esetekben algebrai úton való bizonyítás is.	Tk. 237—239., 259/**148.**, 260/**153.**, 265/**195—198.**, **203.**, 270/**241., 242.** Ml. **94., 95.1.**
125.	Hasonló testek építése. Felszínük, térfogatuk is.	Tk. 240., 241., 265/**199—202.**, **204., 205.**, 266/**207.** Ml. **95.2.** Tk. 266/**206.** Ml. **93.**
126.	Diagnosztizáló teszt.	
127., 128.	A valószínűség kiszámítása egyszerűbb esetben. Kísérletek végzése. — A valószínűség várható értéke. — Feltételezett vagy kiszámított valószínűség és a relatív gyakoriság összehasonlítása.	Ml. 61., 62.
129., 130.	Kombinatorikus és valószínűségi feladatok. Fa-diagramok alkalmazása. Valószínűségek megállapítása statisztikai táblázatok alapján.	Ml. **63—67.**, **86., 87.**
131—139.	*Összefoglalás, rendszerezés* (9 óra).	

DR. GÓDOR GYŐZŐNÉ SERGYÁN STEFÁNIA
középiskolai tanár
Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg

Logikai feladatokról

Az 1985/86. tanévben intenzív matematika-továbbképzésen vettem részt Szegeden, ahol egyetemi tanulmányaimat is végeztem. Már több, mint 10 éve vezetek rendszeresen szakköröket, egyrészt a városi szinten kiemelkedő 6—8. osztályosok matematika-csúcsszakkörét (a KMBK anyagait felhasználva), másrészt a gimnázium I. és II. osztályosaiét.

Tapasztalataim szerint a gyerekek szívesen foglalkoznak logikai fejtörőkkel, amire a tantervi anyagban nem nagyon van lehetőség. Ezért is választottam a továbbképzésen záródolgozatomnak a „Szakköri feladatgyűjtemény összeállítása (logikai feladatokból) és a gyakorlatban való felhasználásának tapasztalatai" témát. Az e témakörben magyar nyelven megjelent irodalom nem jelentős. A kiadott feladatok többnyire nem épülnek egymásra, főleg általános iskolásoknak valók, vagy középiskolai versenyeken szerepelnek.

Ezúttal is köszönetet mondok dr. Pintér Lajos egyetemi docensnek dolgozatom elkészítésében nyújtott segítségéért és hasznos tanácsaiért. Ő ajánlotta azokat az orosz nyelven is megjelent könyveket, amelyeknek magyarra történő lefordítása után állítottam össze a feladatgyűjteményt. Nagyon jónak tartom a Szovjetunióban 1977-ben kiadott „Elemi matematikai logika 9—10. osztályosoknak" és a matematika—fizika tagozatos iskolák számára 1979-ben kiadott „Néhány módszer logikai feladatok megoldására" című könyveket. Elsősorban ezek gazdag feladatanyagából válogattam a formulákkal és táblázatokkal megoldható feladatokat, amelyek rövid elméleti bevezetés után az általános iskolásoknak sem okozhatnak gondot. A formulákkal történő megoldások segítségül szolgálhatnak a gimnáziumi III. osztályos tananyag elmélyítésében, de szerencsésebbnek tartom a „józan ésszel" történő megoldásukat. Különösen szórakoztatóak Martin Gardner újszerű, egyre nehezedő, szellemes történetekbe foglalt és egymásra épülő — angolból orosz nyelvre is lefordított — feladatsorai.

A gimnáziumi III. osztályos matematika-tankönyv számítástechnika fejezete a legalapvetőbb logikai formulákkal (negáció, diszjunkció, konjunkció) és ezek átalakításaival foglalkozik. A III. osztályos fakultatív matematika B változata ennél részletesebben foglalkozik a matematikai logikával (az implikáció és az ekvivalencia is szerepel benne), de a szöveges feladatok formulákkal történő megoldására nem tér ki különösebben.

Az összegyűjtött feladatok szakkörön való részletes kipróbálására nem volt lehetőségem, mivel az említett könyveket 1986 tavaszán kaptam kézhez. A júniusig lefordított feladatokat a gimnáziumi I. osztályos matematika-szakkörökön és a II. osztályos matematika-sávon napirendszerűen szerepeltettem.

Első benyomásként azt vettem észre, hogy meglepi a gyerekeket a feladatok megszövegezése. Ilyen megfogalmazásban nem nagyon hallottak eddig (én sem) igaz—hamis problémára épülő feladatokat. Kezdetben idegenkedtek, még a legjobbak sem akartak foglalkozni velük. „Azt sem tudom, hogyan álljak

neki, én nem tudom megoldani" —, mondták. Az is előfordult, hogy első hallásra kitalálták a megoldást, de következetesen nem gondolták azt végig. Legtöbbször különböző eredményre jutottak, vitatkoztak; különösen kezdetben, amikor még nem ismerték a diszkutáló, minden lehetőségre kiterjedő megoldási módszert, amelyre nekem kellett felhívnom a figyelmüket. Mindenképpen szükség volt az irányításra. Meg kellett tanítani a már említett diszkutáló módszert: Tegyük fel, hogy „ez és ez" igaz, akkor teljesülnek-e a feladat feltételei? Nem jutunk-e ellentmondáshoz? 1—2 foglalkozás után, amikor „pihenésképpen" a számításos feladatok után ezekkel foglalkoztunk, a közepes nehézségű feladatoknál már nem okozott problémát az, hogy minden lehetőséget végig kell gondolni. A nehezebb feladatoknál azonban később is előfordultak eredménytelenségek. Különösen azok a feladatok mentek nehezen, amelyekben nekünk kell kitalálni, hogy az illető mit mondhatott, vagy hogy mi mit kérdezzünk ahhoz, hogy biztosan megtudjunk valamit. Ezek mély gondolkodást igényelnek; egyetemistáknak és felnőtteknek is nehéz feladványok lennének.

Általános *hibaként jelentkezett a „vagy" és a „ha, akkor"* logikai műveletek összetett szöveges feladatokban való *nem helyes értelmezése.* Ez egyáltalán nem lepett meg, mivel I. és II. osztályosokkal próbáltam ki a feladatokat. Ezért szükségesnek tartottam a III. osztályos tankönyvben szereplő logikai műveletek igazságtáblázatainak elkészítését, köznapi szöveges állításokkal megvilágítva. Ezt főleg *a tagadás helyes értelmezése* tette szükségessé.

Mindez az I. osztályban megismert halmazműveletek új oldalról történő megközelítését és elmélyítését is szolgálta.

Régóta egyik kedvenc feladatom a következő igaz—hamis probléma.

> Egy vándor megy Bagdadból Bokharába. Egy falunál elágazik az útja. Az egyik út Bokharába, a másik a sivatagba vezet. Azt, hogy melyik a helyes út, csak a falubeliek tudják; ezekről viszont ismeretes, hogy egy részük mindig igazat mond, a többi pedig mindig hazudik. Hogyan tudhatja meg a vándor, hogy melyik a Bokharába vezető út, ha csak egyetlenegy kérdést szabad feltennie valamelyik falubelinek? *Megoldás:* Pl. Mit szoktál mutatni akkor, ha valaki Bokharába akart menni?

A megoldás a kétszeres tagadásra épül. Ezt a feladatot ritkán tudták csak megoldani a gyerekek. Ez egy „észcsiszoló" feladvány, ami újszerű, *nem a matematikaórán megszokott séma szerinti gondolkodást kíván.*

A záródolgozat feladataiból írásbeli felmérést is készítettem, amelynek alapján megállapítható, hogy *a jeles matematikásoknak mentek a legjobban a feladatok.* Kivételként egy, matematikából közepes eredményt elért I. osztályos tanuló is kiemelkedően szerepelt, akinek nem mennek a számítások, de ugyanakkor nagyon jó logikájú, humán beállítottságú tanuló. Ettől függetlenül matematika-szakkörös volt és kedveli a logikai példákat.

A felmérésben részt vett 7 I. osztályos tanuló 26 feladatra adott megoldása 73,7%-os eredményességű volt (3 alkalommal írták), ami véleményem szerint jónak mondható. Könnyebb és nehezebb feladatok is szerepeltek köztük. A jó eredmény feltétlenül azzal függ össze, hogy matematika-szakkörösökről van szó. A 26 feladatból 9-et (34,6%) mindenki helyesen oldott meg. A legnehezebb hármat viszont senki sem tudta megoldani (közülük kettő az idegosztállyal kapcsolatos feladatokból került ki).

A II. osztályos matematika-sávon mindössze 2 közepes nehézségű (Porcia skatulyáival kapcsolatos) feladatot mértem fel írásban. Ezeket a felmérésben résztvevő 7 tanuló hibátlanul meg tudta

oldani. Az elért 100%-os eredményességhez az is hozzátartozik, hogy mind a heten jelesek matematikából. A későbbiekben előfordultak olyan összetett feladatok (Zombi sziget, Drakula), amelyek náluk is gondot jelentettek. Ők viszont az I. osztályosokhoz képest precízebben, áttekinthetőbben indokoltak. I. osztályban senkinek sem ment ez még kifogástalanul. Két év alatt jelentős javulást sikerült elérnem ezen a területen.

Végső megállapításként elmondható, hogy amennyire kezdetben idegenkedtek a gyerekek ezektől a „furcsa megszövegezésű" feladatoktól, a későbbiekben annyira szívesen foglalkoztak velük. Előfordult, hogy matematikaórán is szóba került 1-2 feladat és még a gyengébb matematikások érdeklődését is felkeltették. Komoly érdeklődést váltottak ki, jó agytornának bizonyultak.

Az idei tanévben szervezett 6. osztályos csúcsszakköröseim nagyon megkedvelték a könnyebb, nekik való feladatsorokat (Alice a csodaerdőben; hölgy vagy tigris?), és az eddig megtartott foglalkozások mindegyikén vettünk közülük kikapcsolódásként 2-3 feladatot.

Újabban a tanulók kérik az ilyen típusú feladatokat és nagyon sajnálták, amikor az Alice-szal kapcsolatos feladatsor végére értünk.

A jövőben feltétlenül lehetőséget kellene teremteni ilyen típusú feladatok feldolgozására. Szakköri szinten változatosságot jelentenének a hagyományos példák mellett. A gimnáziumok III. osztályában pedig életszerűvé tennék a matematikai logika oktatását. Segítségükkel a számolni nem szerető, de az érdekes feladatokat kedvelő gyerekeket is meg lehetne nyerni a matematikának.

Válogatás a feladatgyűjtemény példaanyagából

Példák a logikai formulák alkalmazására

1. Egy utazó az M és az N városok valamelyikébe érkezett, de hogy éppen melyikbe, azt nem tudja. Ennek eldöntésére feltehet egy kérdést, amelyre a válasz „igen" vagy „nem" lehet, miközben ő nem tudja, hogy igazmondótól vagy hazugtól kérdezett-e? Mit kell kérdeznie az utazónak ahhoz, hogy meg tudja határozni, melyik városba érkezett?

Megoldás: Elég pl. megkérdeznie: Biztos-e, hogy én az M városba érkeztem és nekem igazat mondanak; vagy, hogy én az N városra akadtam és nekem hazugságot mondanak?

Legyen ugyanis:

$$A := \{\text{Az utazó az } M \text{ városba érkezett}\},$$
$$B := \{\text{Az utazónak igazat mondanak}\}.$$

Az utazó megkérdezi, hogy igaz-e: $(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$?

Könnyű belátni, hogy az „igen" válaszból, attól függetlenül, hogy igaz-e ez a válasz, vagy sem, az következik, hogy az utazó az M városba érkezett, a „nem" válaszból pedig az következik, hogy ő az N városba érkezett.

Például tételezzük fel, hogy az utazó „igen" választ kapott, és ez a válasz hamis! Akkor ez azt jelentené, hogy az $(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$ kifejezés hamis, és a B kifejezés szintén hamis. De, ha az $(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$ kifejezés hamis, akkor $A \wedge B$ és $\bar{A} \wedge \bar{B}$ is hamis, és mivel $\bar{B}$ igaz, akkor $\bar{A}$ hamis, vagyis A igaz.

Hasonlóképpen megvizsgálhatjuk a többi 3 esetet is.

2. Hazaérkezett Maigret felügyelő és felhívta a rendőrséget:

— Halló! Itt Maigret beszél. Van valami újság? — A válasz:

— Igen főnök. Jelentést kaptunk a többi felügyelőtől.

Tourance megállapította, hogy ha Francoise részeg lett volna, akkor vagy Étienne a gyilkos, vagy Francoise hazudik.

Jousset úgy véli, hogy vagy Étienne a gyilkos, vagy Francoise nem volt részeg, és a gyilkosság éjfél után történt.

Luccas üzeni, hogy ha a gyilkosság éjfél után történt, akkor vagy Étienne a gyilkos, vagy Francoise hazudik.

— Köszönöm, ennyi elég is. Ezzel letette a kagylót. Maigret tudta, hogy a józan Francoise soha nem hazudik. Ezzel ő már mindent megtudott. Ki volt a tettes?

Megoldás: Tekintsük a következő kijelentéseket:

$$A := \{\text{Francoise részeg volt}\},$$
$$B := \{\text{Étienne gyilkos}\},$$
$$C := \{\text{Francoise hazudik}\},$$
$$D := \{\text{A gyilkosság éjfél után történt}\}.$$

Írjuk le logikai műveletek felhasználásával a 3 felügyelő jelentését, majd állítsuk össze ennek a 3 jelentésnek a konjunkcióját és egyszerűsítsük! Mi következik a felügyelők kijelentéséből?

A felügyelők megállapították, hogy:

$$A \Rightarrow (B \vee C) = I, \quad B \vee (\bar{A} \wedge D) = I, \quad D \Rightarrow (B \vee C) = I.$$

Nézzük meg e 3 kijelentés konjunkcióját és egyszerűsítsük:

$$(A \Rightarrow (B \vee C)) \wedge (B \vee (\bar{A} \wedge D)) \wedge (D \Rightarrow (B \vee C)) = I.$$

Felhasználva az $A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B$ formulát, megszabadulunk az implikációtól:

$$(\bar{A} \vee (B \vee C)) \wedge (B \vee (\bar{A} \wedge D)) \wedge (\bar{D} \vee (B \vee C)) = I.$$

Mivel a disztributív törvény alapján: $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ ezért azt írhatjuk, hogy:

$$((B \vee C) \vee (\bar{A} \wedge \bar{D})) \wedge (B \vee \bar{A} \wedge D)) = I.$$

Mégegyszer alkalmazva ezt a törvényt:

$$B \vee ((\bar{A} \wedge D) \wedge (C \vee (\bar{A} \wedge \bar{D}))) = I \quad \text{vagy} \quad B \vee ((\bar{A} \wedge D \wedge C) \vee (D \wedge \bar{A} \wedge \bar{D})) = I,$$

és mivel $D \wedge \bar{A} \wedge \bar{D} = H$, akkor véglegesen kapjuk, hogy

$$B \vee (\bar{A} \wedge D \wedge C) = I.$$

Ilyen módon a felügyelők kijelentéséből csak az következett, hogy vagy Étienne a gyilkos, vagy egyidejűleg 3 körülmény játszott közre: Francoise nem volt részeg, a gyilkosság éjfél után történt, Francoise hazudott. De Maigret tudta, hogy a józan Francoise nem hazudik, vagyis:

$$\bar{A} \wedge \bar{C} = I \quad \text{vagy} \quad \bar{A} \wedge C = I.$$

Következésképpen az eredmény, ami a felügyelők állításaiból következik:

$$B \vee (\bar{A} \wedge D \wedge C) = I.$$

Ez azt eredményezi, hogy $B \vee H = I$ vagyis $B = I$.

Tehát *Étienne követte el a gyilkosságot.*

Aliz a feledékenység erdejében

Amikor Aliz bement a csodaerdőbe, nem felejtett el mindent, csak bizonyos dolgokat. Gyakran felejtette el, hogy kit hogyan hívnak, és hogy a hétnek éppen milyen napja van. Az oroszlán és az egyszarvú is meglátogatták az erdőt. Különleges lények voltak. Az oroszlán hétfőn, kedden és szerdán hazudott, a többi napokon igazat mondott. Az egyszarvú másképpen viselkedett. Csütörtökön, pénteken és szombaton hazudott, a többi napokon igazat mondott.

1. Egyszer Aliz találkozott az oroszlánnal és az egyszarvúval, akik egy fa alatt pihentek és a következőket állították:

Oroszlán: A tegnapi napon hazudtam.

Egyszarvú: Tegnap nekem is hazudós napom volt.

Ebből a két állításból Aliznak sikerült rájönnie, hogy milyen nap volt tegnap. (Nagyon okos kislány volt.)

Megoldás: Az oroszlán azt, hogy ő előző nap hazudott, csak hétfőn és csütörtökön mondhatta, az egyszarvú pedig csak csütörtökön és vasárnap. Mivel mindkettőnek közös kell, hogy legyen az előző nap, „ma" csütörtök van, tegnap szerda volt.

2. Milyen napokon mondhatta az oroszlán a következő állításokat?

1. Tegnap hazudtam.
2. Holnap hazudni fogok.

Megoldás: Ilyent nem állíthat az oroszlán egyik napon sem. Ugyanis az 1. csak hétfőre és csütörtökre vonatkozhat, a 2. pedig szerdára és vasárnapra, tehát nem mondhatta ezt egyik napon sem.

Tralala és Trulala megjelenése

Egyszer egy egész hónapig az oroszlán és az egyszarvú nem jöttek el a feledékenység erdejébe. De Tralala és Trulala a két iker gyakran látogatott oda. Egyikük úgy, mint az oroszlán, hétfőn, kedden és szerdán hazudott, a többi napokon igazat mondott, a másik pedig egyszarvú módjára viselkedett. Aliz nem tudta, hogy ki viselkedik oroszlán és ki egyszarvú módjára, ráadásul annyira hasonlítottak egymásra, hogy nem tudta őket megkülönböztetni.

3. Egyszer Aliz mindkét testvérrel találkozott, akik azt mondták:

Első: Én vagyok Tralala,

Második: Én vagyok Trulala.

Valójában ki volt Tralala és ki volt Trulala? És milyen napon találkoztak?

Megoldás: Vagy mindkét állítás igaz, vagy mindkettő hamis, de ez utóbbi nem lehetséges, mivel sohasem hazudhatnak egy napon, tehát mindkettő igazat mond. Ezért az első Tralala, a második Trulala és Aliz vasárnap találkozott velük.

4. Egy másik alkalommal, amikor a testvérek meglátták Alizt, azt mondták:

Első: Ma vasárnap van.

Második: Ma hétfő van.

Első: Holnap Trulala egyik hazudós napja lesz.

Második: Az oroszlán tegnap hazudott.

Aliz az örömtől tapsolni kezdett. Teljesen meg van oldva a rejtély. Mi a megoldás?

Megoldás: Mindkét testvér nem hazudhat vasárnap, állítva, hogy ma nem vasárnap van, és hogy ma hétfő van. Ezért a nevezetes nap nem lehetett vasárnap. Következésképpen az első testvér igazat mond, a másik pedig hazudik; így a kérdéses nap nem lehet hétfő sem, továbbá az oroszlán tegnap igazat mondott. Ezért a tegnapi nap csütörtök, péntek, szombat vagy vasárnap lehetne, a mai nap pedig péntek, szombat, vasárnap vagy hétfő. Mivel a vasárnapot és a hétfőt már kizártuk, marad a péntek vagy a szombat.

Az 1. testvér szerint holnap olyan nap lesz, amikor Trulala hazudik (mert igazmondó), ezért ma péntek van, és Trulala úgy viselkedik, mint az egyszarvú, az 1. testvér pedig Tralala (mivel pénteken igazat mond).

Porcia skatulyáinak titka

Shakespeare „A velencei kalmár" című művében szereplő Porciának 3 skatulyája volt: arany, ezüst és ólom. Az egyikben Porcia portréja volt. Porcia kérőjének, ha sikerült a portrés skatulyát kiválasztania, feleségül vehette Porciát. Minden skatulya tetején szerepelt egy felirat, amely segíthette a kérő helyes választását.

1. A feliratok a következők voltak:

   Az aranyon: A portré nem az ezüstben van.

   Az ezüstön: A portré nem ebben van.

   Az ólmon: A portré ebben a skatulyában van.

   Azt is közölte Porcia, hogy a 3 feliratból legalább az egyik igaz, és legalább az egyik hamis. Melyikben volt a portré?

   Megoldás: Ha a portré az ólom skatulyában lenne, akkor a feladat feltételei ellenére mind a három állítás igaz lenne. Ha az ezüstben lenne, akkor pedig mind a három hamis lenne. Tehát a portré az arany skatulyában van. Ezért az első két állítás igaz, a 3. pedig hamis, ami eleget tesz a feltételeknek.

2. Porcia lánya, II. Porcia is a skatulyák módszerét választotta, de gazdagította a régi ötletet. A kérővel közölte, hogy minden skatulyát Bellini vagy Csellini készített. Ha Bellini csinálta, akkor mindig igaz a felirat, ha pedig Csellini, akkor hamis. Ebben az esetben csak 2 skatulya szerepelt, és az egyikben Porcia portréja található. A feliratok a következők voltak:

   Az aranyon: A portré nem ebben van.

   Az ezüstön: A kettő közül egyet készített Bellini.

   Melyikben van a portré?

   Megoldás: Ha Bellini készítette volna az ezüstöt, akkor igaz lenne, amit rávéstek. Ezért az arany skatulyát Csellini készítette volna és a portré az arany skatulyában lenne. Tegyük most fel, hogy az ezüstöt Csellini készítette. Akkor az arany is az ő munkája, különben igaz lenne az ezüstöt díszítő felirat és mivel Csellini felirata hamis, a portré az arany skatulyában van. Ezért attól függetlenül, hogy ki készítette az ezüst skatulyát, az arany Csellini munkája és mivel hamis a rajta levő felirat, a portré az arany skatulyában van.

Mit kell mondani?

1. Tegyük fel, hogy ön az igazmondók és hazugok szigetének egyik lakója, és beleszeretett egy kislányba. Feleségül akarja venni, de választottja csak gazdag hazughoz akar feleségül menni. Tegyük fel, hogy ön gazdag hazug és csak egy mondatot szabad mondania a választottjának. Hogyan győzné meg a szerelmét arról, hogy ön gazdag hazug?

   Megoldás: Csak annyit kell mondani: „Én szegény hazug vagyok." Ezt ugyanis igazmondó nem mondhatta, csak hazug, tehát ön nem szegény hazug. Csak gazdag hazug lehet.

2. Tegyük fel, hogy egy bűncselekmény elkövetője nem normális ember. (A normális ember néha igazat mond, néha hazudik.) Ön nem bűnös, de normális. Milyen kijelentést tenne (amely nem származhat se bűnös igazmondótól, se hazugtól) a bíróságon, hogy meggyőzze az esküdtszéket az ártatlanságáról?

   Megoldás: Csak arról kell meggyőznie a bíróságot, hogy ön normális. Azt kell mondania: — Hazug vagyok. Sem az igazmondó, sem a hazug nem tehet ilyen kijelentést. Tehát ön normális ember, tehát nem bűnös.

3. Tegyük fel, hogy én vagy igazmondó vagyok, vagy hazug, és két dolgot állítok:

1. Szeretem Lindát.
2. Ha szeretem Lindát, akkor Katit is szeretem.

Ki vagyok én, igazmondó, vagy hazug?

Megoldás: Igazmondónak kell lennem. Ha hazug lennék, akkor az 1. és a 2. állítás is hazug lenne. Tegyük fel, hogy a 2. állítás hazugság. Akkor Lindát szeretném és Katit nem. Tehát én szeretem Lindát, vagyis az 1. állítás igaz. Ez lehetetlen, tehát nem lehetek hazug.

Zombi sziget

Egy kis szigeten, Tahititől nem messze, a varázslók a lakosság felét zombivá változtatták. A zombik ugyanolyanok, mint az emberek, de mindig hazudnak a szigeten élő emberekkel szemben, akik mindig igazat mondanak. Bonyolítja a helyzetet, hogy minden kérdésre, amely igen vagy nem választ igényel, a szigetlakók „bal"-lal, vagy „da"-val felelnek. Az anyanyelvükön ezek a szavak az ingennek és a nemnek felelnek meg, de mi nem tudjuk, hogy a két szó közül melyik az igen és melyik a nem.

1. Egyszer egy bennszülöttel találkoztam és azt kérdeztem tőle:

— A „bal" az igennek felel meg? Az úgy válaszolt:

— „Bal."

a) Meg lehet-e a beszélgetésből állapítani, hogy mit jelent a „bal" szó?

b) Meg lehet-e a beszélgetésből állapítani, hogy a beszélgetőtársam zombi-e vagy ember?

Megoldás: Lehetetlen megállapítani, hogy mit jelent a „bal" szó, de az biztos, hogy a beszélgetőtársam ember.

Tegyük fel ugyanis, hogy a „bal" igent jelent. Akkor a „bal" igaz válasz arra a kérdésre, hogy a „bal" igent jelent-e? Tehát a beszélgetőtársam ember. Tegyük most fel, hogy a „bal" nemet jelent. Akkor a nem igaz válasz lesz a feltett kérdésre, tehát a társam ember, és ezért attól függetlenül, hogy a „bal" mit jelent, egyértelműen eldönthető, hogy a társam ember.

2. Képzelje el, hogy ön feleségül akarja venni Zombi sziget törzsfönökének lányát. A törzsfőnök viszont csak annak adja a lányát, aki értelmes, és ezért egy próbát kell kiállnia. Önnek egy kérdést kell feltennie a varázslónak. Ha a varázsló „bal"-t válaszol rá, akkor megkapja a lányát, ha viszont „da"-t felel rá, akkor máshol kell feleséget keresnie. Ki ez a varázsló? Ember vagy zombi? Nem tudjuk. Milyen kérdést kell tehát feltennie, hogy attól függetlenül, a „bal" igent jelent-e vagy sem, „bal"-lal válaszoljon?

Megoldás: Például azt lehet kérdezni, hogy:

— Igaz-e, hogy a „bal" igaz válasz arra a kérdésre, hogy a varázsló ember?

1. eset: *Ha a varázsló ember* és ha a „bal" igent jelent, akkor a „bal" helyes válasz a kérdésre, ezért a varázsló „bal"-t fog mondani. Ha a „bal" nemet jelent, akkor a „bal" helytelen válasz, és mivel a varázsló nem hazudik, „bal"-t fog mondani.

2. eset: *Ha a varázsló zombi* és ha a „bal" igent jelent, akkor a „bal" helytelen válasz a kérdésre, de mivel a varázsló zombi, hazudni fog és azt mondja, hogy „bal". Ha a „bal" nemet jelent, akkor a „bal" a kérdésre helyes válasz, tehát a varázsló lehazudja és azt mondja, hogy „bal".

Hölgy vagy tigris?

Egyszer egy király a következő feladatot adta a foglyainak: Különböző szobák vannak, amelyekben vagy egy hölgy, vagy tigris található. A szobák ajtaján feliratok találhatók, amelyek alapján, ha a fogolynak sikerül azt a szobát kiválasztani, ahol

a hölgy található, akkor kiszabadul, ha viszont tigris, akkor nem menekül, mert az megeszi. És, ha az I.-ben hölgy van, akkor a felírás igaz, ha tigris, akkor hamis. A II.-ban fordítva.

1. próba: I. Mindkét szobában hölgy van.
II. Mindkét szobában hölgy van.
Melyik szobát válassza a fogoly?

Megoldás: Világos, hogy mindkét állítás csak hamis lehet, ezért az I. szobában tigris, a II.-ban pedig hölgy van.

2. próba. I. Legalább az egyik szobában hölgy van.
II. A másik szobában hölgy van.
Melyik szobát válassza a fogoly?

Megoldás: Ha az I.-ben tigris lenne, ellentmondáshoz jutnánk, tehát az I.-ben hölgy van, a II.-ban pedig tigris, mert a II. felírás is igaz.

Történetek az idegosztályról

Az idegosztály lakói orvosok és páciensek, akik lehetnek egészségesek és betegek. Az egészségesek válasza mindig igaz, a betegeké hamis.

1. Perry Mazon az idegosztály egyik lakójával találkozik, aki egy állítást mond neki, mire Perry a homlokára csap, és azt mondja:
— Te jó ég! Ez egy egészséges páciens. Mit mondhatott a lakó?
Megoldás: Például a következőt mondhatta:
— Nem vagyok egészséges orvos.
Ezt ugyanis csak egészséges páciens mondhatja.
2. Egy másik lakó olyan mondatot mond, amelyből Perry arra következtet, hogy ez a lakó beteg orvos. Mit mondhatott ez a lakó?
Megoldás: — Beteg páciens vagyok.
Ezt ugyanis csak beteg orvos mondhatja.
3. Perry Mazon megkérdezi egy lakótól:
— Ön páciens? A válasz:
— Igen.
Eldönthető-e egyértelműen, hogy ki mondta ezt?
Megoldás: Ha a lakó egészséges, akkor egészséges páciens volt. Ha pedig beteg, akkor beteg orvos lehetett. Hogy Perry Mazon a kettő közül kivel beszélgetett, nem dönthető el.

DR. KOSKA ÁRPÁD
mérnöktanár
Építőipari Szakközépiskola, Miskolc

Térbeli ívmetszés megoldása és programozása COMMODORE—64 típusú számítógépre

Mérőeszközeink pontosságának fejlődésével a gyakorlati élet számos területén — geometriai problémák megoldásánál — az egyszerű szerkesztéseken és transzformációkon alapuló számítási módszerek kerültek előtérbe. Ilyen problémakörnek tekinthető a térbeli ívmetszés, amely megoldási módszer lehetővé teszi, hogy pl. egy hozzáférhetetlen térbeli pont — amely azonban alkalmas arra, hogy egy fénytávmérő prizmáját rajta elhelyezzük — mindhárom koordinátáját nagy pontossággal meghatározhassuk.

A meghatározáshoz elegendő három — mindhárom koordinátájával — adott pont ismerete, amelyekből a meghatározandó pont összelátható, vagyis a három pontból

a meghatározandó pontig terjedő távolságokat (a triéder három élét) pl. elektronikus távmérővel megmérhetjük. A feladatot tehát a 3-3 koordinátából (9 adat) és a 3 távolságból (összesen 12 adatból) — szögmérés nélkül — egyszerűen Pithagorász tételének alkalmazásával oldhatjuk meg. Ha a megoldást dimenzionálva programozzuk, ugyanarra a pontra vonatkozóan tetszőleges számú ponthármasból elvégezhetjük a számítást, s a megoldások halmazából kiegyenlítő-számítási módszerek alkalmazásával fokozhatjuk számításunk pontosságát.

A feladatmegoldás rendkívüli előnye, hogy *síkbeli ívmetszésre* is alkalmazható, ekkor csupán a három pont harmadik koordinátáit nullával kell bevinnünk az adatokba, s a meghatározandó ponttól való távolságok a vízszintesre redukálva jelentkeznek (tahiméterrel mérve ezeket közvetlenül kapjuk), ezekkel az értékekkel kerülnek be a távolsági adatokba. Ekkor a számítógép az ismeretlen pont vízszintes koordinátáit számítja ki közvetlenül (a harmadik koordináta nulla lesz) mint a másodfokú egyenletek egybeeső, egyetlen megoldását. (A síkbeli ívmetszés azzal, hogy három pontból számolunk, nem válik túlhatározottá, hiszen a másodfokú egyenletek egybeeső megoldásairól van szó.)

Az egyszerűség kedvéért — a rajzi jelöléstől függetlenül — a matematikában előnyösebb indexezéssel, megszokott módon számolunk és írjuk fel a 3 ismert pont koordinátáival, valamint a meghatározandó pont (x-szel, y-nal és z-vel jelölt) koordinátáival a három másodfokú egyenletet. Ezeket egymásból ciklikusan kivonva, elsőfokú egyenleteket kapunk, amelyekből két ismeretlent kifejezve és ezeket a másodfokú egyenletek valamelyikébe visszahelyettesítve, megkapjuk a keresett pont egyik koordinátáját két megoldásban. A hozzájuk tartozó (másik két ismeretlen) megfelelő koordinátákat az elsőfokú egyenletekből kifejezett ismeretlenek összefüggéseibe visszahelyettesítve kapjuk két megoldásban.

A megoldások a három, ismert koordinátájú pont által meghatározott sík mindkét oldalán helyezkednek el, amelyekből a nekünk megfelelőt kiválaszthatjuk. Síkbeli ívmetszés esetén a két megoldás egybeesik.

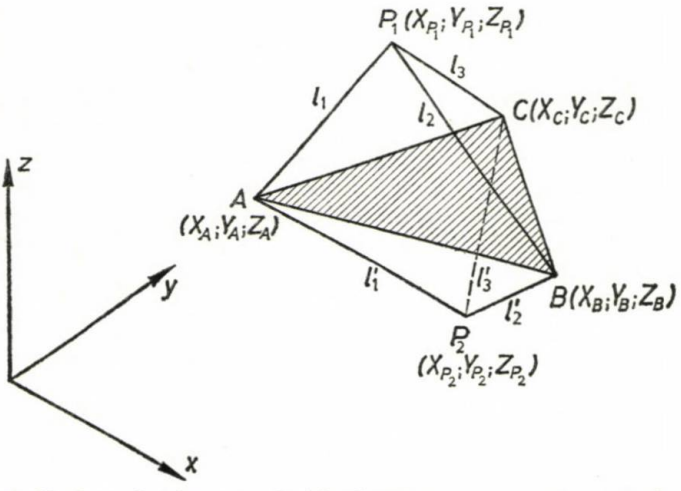
Számításaink áttekinthetősége céljából vezessük be a következő indexezést, s csak a program írásakor térjünk át a geodéziában használatosabb jelölésekre és a dimenzionálás jelölésére:

$$X_A = X_1; \quad X_B = X_2,$$

$$Y_A = Y_1; \quad Y_B = Y_2,$$

$$Z_A = Z_1; \quad Z_B = Z_2.$$

Hasonlóképpen $X_C = X_3$, $Y_C = Y_3$, és $Z_C = Z_3$ legyen!



Az A, B, C ismert pontok által meghatározott sík feletti P_1 keresett pont koordinátáinak megállapításához végezzük el a levezetést! Itt is az indexezést átírva:

$$XP_1 = x,$$

$$YP_1 = y,$$

és

$$ZP_1 = z$$

legyen!

Általánosan, tetszőleges, meghatározandó P_1 pont koordinátáinak kiszámításához a térben, az ismert i-edik pontban Pithagorász tételét felírva:

$$(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2 = l_i^2.$$

Kifejtve:

$$x^2+y^2+z^2-2x\cdot x_i-2y\cdot y_i-2z\cdot z_i+x_i^2+y_i^2+z_i^2 = l_i^2.$$

Ha ugyanezt az $(i-1)$-edik pontra írjuk fel (példánkban az A és B pontra), és *képezzük a két másodfokú egyenlet megfelelő oldalainak különbségét*, akkor elsőfokú egyenletet kapunk (csak ismert pontok koordinátái és távolságok szerepelnek a négyzeten mint konstansok).

$$-2x(x_2-x_1)-2y(y_2-y_1)-2z(z_2-z_1)+x_2^2+y_2^2+z_2^2-l_2^2+l_1^2-x_1^2-y_1^2-z_1^2 = 0.$$

A konstans rész: $k_1=x_2^2+y_2^2+z_2^2-l_2^2+l_1^2-x_1^2-y_1^2-z_1^2$. Ezért az A, B pontra egyenletünk lineárisan:

I. $$2x(x_1-x_2)+2y(y_1-y_2)+2z(z_1-z_2)+k_1 = 0.$$

Az A, C pontra:

II. $$2x(x_1-x_3)+2y(y_1-y_3)+2z(z_1-z_3)+k_2 = 0,$$

ahol $k_2=x_3^2+y_3^2+z_3^2-x_1^2-y_1^2-z_1^2-l_3^2+l_1^2$ konstans.

Ugyanígy a B és C pontra:

III. $$2x(x_2-x_3)+2y(y_2-y_3)+2z(z_2-z_3)+k_3 = 0,$$

ahol $k_3=x_3^2+y_3^2+z_3^2-x_2^2-y_2^2-z_2^2-l_3^2+l_2^2$ konstans.

Az így kapott egyenletek lineárisak ugyan, de nem függetlenek egymástól, hiszen a három másodfokú egyenletből ciklikus kivonással kaptuk őket, azaz belőlük a koordináták nem határozhatók meg (azonosságokat kapnánk), csak valamelyik másodfokú egyenlettel együtt. Viszont alkalmasak arra, hogy belőlük két ismeretlent kifejezve, kiküszöbölhetjük ezeket az ismeretleneket, hogy a másodfokú egyenletünkben már csak egy ismeretlen legyen.

(A három lineáris egyenletet vektoros alakból is levezethetjük, ha az A, B, C ismert pontokhoz vezető vektorokat: $\mathbf{r}_1$-gyel, $\mathbf{r}_2$-vel, $\mathbf{r}_3$-mal, a meghatározandó P ponthoz vezetőt $\mathbf{r}$ helyvektorral jelöljük, akkor az egyenleteket vektorosan ilyen alakból vezethetjük le:

$$2\cdot\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)+k_1 = 0,$$

$$2\cdot\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)+k_2 = 0,$$

és

$$2\cdot\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3)+k_3 = 0.)$$

Írjuk összefoglalva az így kapott lineáris — és az eredeti (még ki nem fejtett) másodfokú egyenleteket:

I. $$2x(x_1-x_2)+2y(y_1-y_2)+2z(z_1-z_2)+k_1 = 0,$$

II. $$2x(x_1-x_3)+2y(y_1-y_3)+2z(z_1-z_3)+k_2 = 0,$$

III. $$2x(x_2-x_3)+2y(y_2-y_3)+2z(z_2-z_3)+k_3 = 0.$$

Valamint

I.* $$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2 = l_1^2,$$

II.* $$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2 = l_2^2,$$

III.* $$(x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3)^2 = l_3^2.$$

Most a lineáris I. egyenletből fejezzük ki x-et és helyettesítsük be az ugyancsak lineáris II.-be, hogy csak két ismeretlenünk maradjon!

$$x = \frac{2y(y_2-y_1)+2z(z_2-z_1)-k_1}{2(x_1-x_2)}.$$

Mivel a sok, indexes tényezőket tartalmazó tagban nehéz eligazodni, előnyösnek mutatkozik segédváltozók bevezetése, annál is inkább, mivel a C—64-es gépen egyszerre csak két sorban írható fel egy összefüggő aritmetikai műveletsor. — Így helyettesítéssel (segédváltozók bevezetésével) rövidebbé válnak a hosszú aritmetikai kifejezések.

Mivel azonban nagyon sok ilyen helyettesítést kell alkalmaznunk, ezért kénytelenek voltunk kétbetűs változókat is bevezetni, de ne felejtsük el, hogy ezek nem szorzatok. A későbbiek folyamán kénytelenek leszünk még zárójelbe is tenni őket, amikor a dimenzionálást bevezetjük. (A kétbetűsnek deklarált változóktól megkülönböztetésül ezért nem szabad elfelejtenünk az egybetűsek szorzásánál a szorzási művelet jelét kitenni, amely a programban csillagnak felel meg.) A bevezetett segédváltozók:

$$A = x_3-x_1, \quad E = k_2\cdot(x_2-x_1), \quad K = (x_1-x_2)\cdot(y_1-y_3)-A\cdot B,$$

$$B = y_2-y_1, \quad F = C\cdot(x_1-x_2),$$

$$C = z_3-z_1, \quad GA = -k_1\cdot A+E,$$

$$D = z_2-z_1, \quad GM = 2\cdot(A\cdot D+F),$$

Ezzel a helyettesítéssel a fentebb kifejezett X a következő alakú lesz:

$$X = \frac{2\cdot y\cdot B+2\cdot z\cdot D-k_1}{2\cdot(x_1-x_2)},$$

X-nek ezt az alakját már a II. egyenletbe helyettesíteni könnyebb, mely által: $y=\frac{2z(A\cdot D+F)-k_1\cdot A+E}{2K}$, illetve végső alakban: $y=\frac{z\cdot GM+GA}{2\cdot K}$ lesz. (Ha pedig a $Q=\frac{GM}{2\cdot K}$ továbbá az $R=\frac{GA}{2\cdot K}$ segédváltozókat is bevezetjük, akkor az $Y=Z\cdot Q+R$ egyszerű alakot veszi fel, amely rendkívül megkönnyíti majd a vegyes másodfokú egyenletből meghatározott Z_1 és Z_2 gyökökhöz tartozó Y_1 és Y_2, továbbá az X_1 és X_2 összetartozó gyökök meghatározását.)

Felismerhetjük, hogy az x ismeretlenünk a jobb oldalon még y-t is tartalmaz, ezért vezessük be:

$$GR = B\cdot GM+2\cdot D\cdot K,$$

$$GS = B\cdot GA-k_1\cdot K,$$

$$GN = 2\cdot K\cdot(x_1-x_2)$$

segédváltozókat. Ekkor az $x=\frac{z\cdot GR+GS}{GN}$ és $y=\frac{z\cdot GM+GA}{2\cdot K}$ összefüggésekkel végezhetjük el a helyettesítést pl. a III* másodfokú egyenletünkbe, amely által csak z lesz ismeretlenünk.

A III* egyenletünket rendezzük úgy, hogy a z ismeretlent tartalmazó rész maradjon a bal oldalon, ekkor

$$\text{III}^* \qquad (z-z_3)^2 = l_3^2-(x-x_3)^2-(y-y_3)^2$$

alakú lesz.

Végezzük el most x és y helyettesítését a fent bevezetett segédváltozókkal:

Egyenletünk

$$(z-z_3)^2 = l_3^2-(x-x_3)^2-(y-y_3)^2\text{-ből az átalakításokkal}$$

$$\text{III}^* \qquad (z-z_3)^2 = l_3^2-\left(\frac{z\cdot GR+GS}{GN}-x_3\right)^2-\left(\frac{z\cdot GM+GA}{2\cdot K}-y_3\right)^2$$

alakot vette fel.

Elvégezve a négyzetreemeléseket, összevonásokat, majd a Z hatványai szerinti rendezést, nullára redukálva és bevezetve a $G=\frac{2\cdot GS\cdot x_3}{GN}$ továbbá a $GT=2\cdot GR\cdot GS$ segédváltozókat, továbbá az áttekinthetőség és az újabb segédváltozók bevezetése céljából a kétbetűs segédváltozókat zárójelbe téve:

$$z^2\left(1+\frac{(GR)^2}{(GN)^2}+\frac{(GM)^2}{(2\cdot K)^2}\right)+z\left(\frac{(GT)}{(GN)^2}+\frac{2(GM)\cdot(GA)}{(2\cdot K)^2}-\frac{2\cdot x_3\cdot(GR)}{(GN)}-\right.$$

$$\left.-\frac{y_3(GM)}{K}-2z_3\right)+x_3^2+y_3^2+z_3-l_3^2+\frac{(GS)^2}{(GN)^2}+\frac{(GA)^2}{(2\cdot K)^2}-G-\frac{y_3\cdot(GA)}{K}.$$

Most ismét szükségessé válik Z (a vegyes másodfokú egyenlet Z^2, Z) együtthatóinak és konstans részének áttekinthetősége céljából újabb segédváltozókat bevezetni. Mivel a COMMODORE 64-nél legfeljebb két sorba programozhatunk egy-egy aritmetikai utasítást, szét kell ezért tördelnünk a műveletsorokat. Legyenek a segédváltozók betűi:

$$O=\left(1+\frac{(GR)^2}{(GN)^2}+\frac{(GM)^2}{(2\cdot K)^2}\right).$$

Az elsőfokú Z együtthatót két segédváltozóval kell már kifejeznünk

$$H=\frac{(GT)}{(GN)^2}+\frac{2\cdot(GM)\cdot(GA)}{(2\cdot K)^2},$$

továbbá

$$N=\frac{2\cdot x_3\cdot(GR)}{(GN)}+\frac{y_3\cdot(GM)}{K}+2\cdot z_3.$$

Végül a konstans részt is két segédváltozóval fejezzük ki:

$$L=x_3^2+y_3^2+z_3^2-l_3^2 \quad \text{és} \quad I=\frac{(GS)^2}{(GN)^2}+\frac{(GA)^2}{(2\cdot K)^2}-G-\frac{y_3\cdot(GA)}{K}.$$

További egyszerűsítés céljából vezessük be: $P=H-N$, illetve *most már dimenzionálhatunk*, nehogy a sok változó és az ismeretlen összekeveredjen, tehát

$P(S)=H(S)-N(S)$ és $Z(S)$ vegyes másodfokú egyenlet *konstansa*, nem pedig az ismeretlen)$=L(S)+I(S)$. A többi segédváltozót is dimenzionálva (sok ponthármast feltételezve): $O(S)=O$ (betű) végső vegyes másodfokú egyenlet alakja:

$$O(S)\cdot Z^2+P(S)\cdot Z+Z(S)=0,$$

ahol $Z(S)$ konstans rész. Sikerült tehát a rendkívül bonyolult egyenletünket a legegyszerűbb alakra hoznunk.

Most már csupán a diszkrimináns kap dimenzionált jelölést:

$$DI(S)=P(S)^2-4\cdot O(S)\cdot Z(S),$$

illetve ennek négyzetgyökének legyen jelölése:

$$M(S)=\sqrt{DI(S)},$$

amely a sík egyik oldalán lévő Z_1 megoldásnál nyer helyettesítést, míg a sík másik oldalán levő megoldáshoz az $M(S)=-M(S)$ érték a Z_2 meghatározásánál fog szerepelni.

Miután $Z_1(S)$-t (ami a vegyes másodfokú egyenlet egyik gyöke) meghatároztuk, a hozzátartozó $Y_1(S)$ és $X_1(S)$ mint a keresett P_1 pont második és harmadik koordinátájának meghatározása következik. Gondolatmenetünkben ne feledkezzünk meg arról, hogy a keresett P pont koordinátái mind dimenzionált értékek, hiszen akárhány (S számú) ponthármast vehetünk ugyanarra a pontra történt méréssel. (Helyesebb tehát talán $P_1Z_1(S)$, $PY_1(S)$ és a $P_1X_1(S)$ — mint a P_1 pont (Z, Y, X) koordinátáinak jelöléséről beszélni —, ahol $P_1Y_1(S)=\dfrac{Z_1(S)\cdot GM(S)+GA(S)}{2\cdot K}$ már korábban kifejezett összefüggések (dimenzionálva), valamint

$$P_1X_1(S)=\frac{Z_1(S)\cdot GR(S)+GS(S)}{GN(S)},$$

illetve az első alakkal (mivel már ismerjük Y-t):

$$P_1X_1(S)=\frac{2\cdot Y_1(S)B+2\cdot Z_1(S)\cdot D-k_1}{2\cdot(x_1-x_2)}$$

összefüggésekkel számíthatók.

Ha most még a

$$Q(S)=\frac{GM(S)}{2\cdot K(S)}\quad\text{és az}\quad R(S)=\frac{GA(S)}{2\cdot K(S)}$$

segédváltozókat vezetjük be, akkor

$$P_1Y_1(S)=Z_1(S)\cdot Q(S)+R(S)$$

egyszerű alakot ölti fel.

A $Z_2(S)$ másik gyök (az ABC sík másik oldalán a P_2 pont koordinátáinak meghatározásához) alapján analóg módon határozzuk meg a $P_2Y_2(S)$ koordinátákat. Most a program írásakor térjünk át az eredeti geodéziai jelölésekre: $x_A=x_1$ ... és a $DA=l_1$; $DB=l_2$ és a $DC=l_3$ jelölésekre, s akkor a mellékelt (alábbi) programot kapjuk. Ezt síkbeli ívmetszésre is alkalmazhatjuk, de ekkor az A, B, C pontok harmadik koordinátájánál nullákat kell bevinnünk, a DA, DB, DC távolságoknál pedig a vízszintesre redukált (térképi) távolságokat.

```
100 REM ***** "DIM. TERB. IVM. " *****
105 OPEN4, 4
110 PRINT " "
111 INPUT "ALLASPONTI ISM. PONTHARMASOK SZAMA: ":D
112 DIM XA(D), YA(D), ZA(D), DA(D), DB(D), DC(D), K1(D), K2(D), K3(D), X1(D), Y1(D),
    Z1(D)
113 DIM XB(D), YB(D), ZB(D), XC(D), YC(D), ZC(D), X2(D), Y2(D), Z2(D)
114 DIM L(D), M(D), N(D)
115 DIM A(D), B(D), C(D), D(D), I(D), DI(D)
116 DIM E(D), F(D), G(D), K(D), T1(D), T2(D)
117 DIM GA(D), GM(D), GR(D), GS(D), GT(D), GN(D)
118 DIM O(D), P(D), Q(D), R(D), Z(D)
119 FOR S=1 TO D
120 PRINT "HAROM ISMERT PONT TERBELI KOORDINATAI: "
130 INPUT "ELSO PONT KOORDINATAI: "; YA(S), XA(S), ZA(S)
140 INPUT "MASODIK PONT KOORDINATAI: "; YB(S), XB(S), ZB(S)
150 INPUT "HARMADIK PONT KOORDINATAI: "; YC(S), XC(S), ZC(S)
160 PRINT "AZ ISMERT PONTHARMASOK TERB. KOORD. -AI: Y, X, Z"
162 PRINT YA(S), XA(S), ZA(S)
163 PRINT YB(S), XB(S), ZB(S)
164 PRINT YC(S), XC(S), ZC(S)
170 INPUT "AZ A-P TAV. :"; DA(S)
180 INPUT "A B-P TAV. :"; DB(S)
190 INPUT "A C-P TAV. :"; DC(S)
192 PRINT "TAVOLSAGOK:"; DA(S); DB(S); DC(S)
195 PRINT "A MEGHATAROZANDO PONT KOORD. -AI: X1(S), Y1(S), Z1(S); X2(S), Y2(S),
        Z2(S)"
200 REM ***** "SZAMITASOK" *****
210 K1(S)=XB(S) 12+YB(S) 12+ZB(S) 12-XA(S) 12-YA(S) 12-ZA(S) 12-DB(S) 12+DA(S) 12
211 K2(S)=XC(S) 12+YC(S) 12+ZC(S) 12-XA(S) 12-YA(S) 12-ZA(S) 12-DC(S) 12+DA(S)
    12
212 K3(S)=XC(S) 12+YC(S) 12+ZC(S) 12-XB(S) 12-YB(S) 12-ZB(S) 12-DC(S) 12+DB(S) 12
214 PRINT "SEG. VALT. : K1, K2, K3", K1(S), K2(S), K3(S)
215 A(S)=(XC(S)-XA(S))
216 B(S)=(YB(S)-YA(S))
217 C(S)=(ZC(S)-ZA(S))
218 D(S)=(ZB(S)-ZA(S))
219 E(S)=K2(S)*(XB(S)-XA(S))
220 F(S)=C(S)*(XA(S)-XB(S))
221 K(S)=((XA(S)-XB(S))*(YA(S)-YC(S))-A(S)*B(S))
222 GA(S)=-K1(S)*A(S)+E(S)
223 GM(S)=2*(A(S)*D(S)+F(S))
224 GR(S)=B(S)*GM(S)+2*D(S)*K(S)
225 GS(S)=B(S)*GA(S)-K1(S)*K(S) 12
226 GT(S)=2*GR(S)*GS(S)
227 GN(S)=2*K(S)*(XA(S)-XB(S))
228 G(S)=(2*XC(S)*GS(S))/GN(S)
229 PRINT "A, B, C, D, E, F, G, K", A(S), B(S), C(S), D(S), E(S), F(S), G(S), K(S)
230 PRINT "GA, GM, GR, GS", GA(S), GM(S), GR(S), GS(S)
231 PRINT "GT, GN, G", GT(S), GN(S), G(S)
232 O(S)=1+GR(S) 12/GN(S) 12+GM(S) 12/(2*K(S)) 12
233 H(S)=GT(S)/(GN(S)) 12+2*GM(S)*GA(S)/(2*K(S)) 12
234 N(S)=2*XC(S)*GR(S)/GN(S)+YC(S)*GM(S)/K(S)+2*ZC(S)
235 I(S)=(GS(S)/GN(S)) 12+(GA(S)/(2*K(S))) 12-YC(S)*GA(S)/K(S)-G(S)
236 L(S)=XC(S) 12+YC(S) 12+ZC(S) 12-DC(S) 12
237 PRINT "SEGEDVALTOZOK : O, H, I, L, N", O(S), H(S), I(S), L(S), N(S)
240 P(S)=(H(S)-N(S)): PRINT "P", P(S)
241 Z(S)=(L(S)+I(S)): PRINT "Z", Z(S)
242 IF ZA(S)=0 AND ZB(S)=0 AND ZC(S)=0 THEN Z1(S)=0 AND Z2(S)=0: GOTO 277
243 DI(S)=P(S) 12-4*O(S)*Z(S)
244 IF ABS(DI(S))<0. 01 THEN DI(S)=0: GO TO 246
```

```
245 PRINT "DI", DI(S): GO TO 274
246 PRINT "DISZKR. KOZEL NULLA, IGY EGY MEGOLDAS VAN", DI(S)
274 IF DI(S)<ØTHEN 288
276 M(S)=SQR(DI(S)): PRINT "M", M(S): GOTO 28Ø
277 PRINT "Z1", Z1(S), Z2(S): Y1(S)=GA(S)/(2*K(S)): Y2(S)=Y1(S): PRINT "Y", Y1(S)
278 X1(S)=(2*Y1(S)*B(S)-K1(S))/(2*(XA(S)-XB(S))): X2(S)=X1(S): PRINT "X", X1(S)
279 PRINT "SIKBELI MEGOLDAS: ": PRINT "Y", Y1(S): PRINT "X", X1(S): GOTO 31Ø
28Ø Z1(S)=(—P(S)+M(S))/(2*O(S))
285 PRINT "A MEGHATAROZANDO PONT KOORDINATAI:"
286 PRINT "Z1", Z1(S)
287 GO TO 29Ø
288 PRINT "NINCS VALOS MEGOLDAS, AZ ADATOK HIBASAK": GO TO 35Ø
29Ø PRINT "EGYIK MEGOLD. "
291 Q(S)=GM(S)/(2*K(S))
292 R(S)=GA(S)/(2*K(S))
293 Y1(S)=Z1(S)*Q(S)+R(S): PRINT "Y1", Y1(S)
294 X1(S)=(2*Y1(S)*B(S)+2*Z1(S)*D(S)-K1(S))/(2*(XA(S)-XB(S)))
295 PRINT "X1", X1(S): PRINT "Z1(S)", Z1(S)
297 M(S)=-M(S)
298 PRINT "MASIK MEGOLDAS:"
299 Z2(S)=(-P(S)+M(S))/(2*O(S))
3ØØ PRINT "Z2", Z2(S)
3Ø4 Y2(S)=Z2(S)*Q(S)+R(S): PRINT "Y2", Y2(S)
3Ø5 X2(S)=(2*Y2(S)*B(S)+2*Z2(S)*D(S)-K1(S))/(2*(XA(S)-XB(S))): PRINT "X2", X2(S)
3Ø6 PRINT "MASIK MEGOLD. ", Y2(S), X2(S), Z2(S)
3Ø7 PRINT "Y2", Y2(S): PRINT "X2", X2(S): PRINT "Z2", Z2(S)
3Ø8 PRINT "OSSZES MEGOLDAS:", Y1(S), X1(S), Z1(S):PRINT:PRINT Y2(S), X2(S), Z2(S)
31Ø PRINT "ELLENORZES"
311 T1(S)=K1(S)+2*X1(S)*(XA(S)-XB(S))-2*Y1(S)*B(S)-2*Z1(S)*D(S): PRINT "T1",
    T1(S)
312 T2(S)=K2(S)-2*X2(S)*A(S)+2*Y2(S)*(YA(S)-YC(S))-2*Z2(S)*C(S): PRINT "T2",
    T2(S)
313 IF ABS(T1(S))<Ø  ØØ3 AND ABS(T2(S))<Ø  ØØ3 THEN T1(S)=Ø: T2(S)=Ø: GOTO 316
314 IF ABS(T1(S))>Ø  ØØ3 AND ABS(T2(S))>Ø  ØØ3 THEN 315
315 PRINT "MEGOLDAS A HIBKORLATON TUL VAN": GOTO 32Ø
316 PRINT "A MEGOLDAS JO": PRINT "IGY T1=", T1(S): PRINT "IGY T2=", T2(S): GOTO 32Ø
32Ø NEXTS
321 PRINT "VAN MEG UJABB FELADAT? HA IGEN AZ I-T, HA NEM, AZ N-T NYOMJA MEG!"
322 X$="": GET X$: IF X$="" THEN 322
324 IF X$="N" THEN PRINT "AKKOR VEGE": END
326 IF X$="I" THEN 328
328 CLR: GOTO 1Ø5
35Ø END
READY.
```

Síkbeli ívmetszés

```
AZ ISMERT PONTHARMASOK TERB. KOORD. -I: Y, X, Z
-13Ø734. 657          66793. 773          Ø
-13Ø649. Ø5           668Ø3. Ø6           Ø
-13Ø659. 85           66697. 74           Ø

MERT TAVOLSAGOK              118. 15          78. 15          35. 4
SIKBELI MEGOLDAS:
Y, X          -13Ø638. Ø99                    66725. 6194

A MEGOLDAS JO
```

Térbeli ívmetszés

```
AZ ISMERT PONTHARMASOK TERB. KOORD. -I: Y, X, Z
 1Ø1          1Ø1          1Ø4
 1Ø1          1Ø2          1Ø2. 44949
 1Ø2          99           1Ø1

MERT TAVOLSAGOK          5              4              3
```

EGYIK MEGOLDAS:

Y, X1, Z1

104. 000108 101. 00003 100. 000017

MASIK MEGOLDAS:

Y2	99. 7040158
X2	99. 9082234
Z2	99. 295857

OSSZES MEGOLDAS: Y1, X1, Z1 ES Y2, X2, Z2

Y1	104. 000108
X1	101. 00003
Z1	100. 000017
Y2	99. 7040158
X2	99. 9082234
Z2	99. 295857

A MEGOLDAS JO

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10., II. 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1155. Egy iskola összejövetelt rendez régi diákjainak. Minden évfolyamról megjelenik legalább egy ember. Mindenki azokkal és csak azokkal tegeződik, akik legfeljebb 2 évvel előbb vagy később végeztek nála. Hogyan ültessük le a társaságot egy kerek asztal köré, hogy mindenki tegeződjön a mellette ülőkkel?

1156. Az n cm oldalhosszúságú négyzetben 1 cm átmérőjű körlemezeket szeretnénk elhelyezni. Van-e olyan n, amelyhez található olyan átfedés nélküli elhelyezés, amelyben a körök száma n^2-nél nagyobb?

1157. Egy egységtérfogatú tetraéder valamennyi élén és a vele szemközti élnek a felezőpontján át egy-egy (összesen tehát hat) síkot fektetünk. Hány részre osztják ezek a síkok a tetraédert és mekkora e részek térfogata?

1158. Legyen $S_n = \sum_{i=1}^{n} [\sqrt{i}]$. Melyik az az n egész, amelyre $|n - S_n|$ minimális? ($[x]$ az x-nél nem nagyobb valós számok legnagyobbikát jelöli.)

Varga István, Nagyszalonta

1159. Oldjuk meg a valós számhármasok halmazán az

$$\frac{1}{2} + \ln(1+x^2) = \frac{\cos y}{1+\cos y},$$

$$\operatorname{ch} y = |z-1| e^{-|z|}$$

egyenletrendszert!

Bencze Mihály, Brassó

1160. Az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt az

$$x \mapsto 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos(\sqrt{2}\,x) - B\sin(\sqrt{2}\,x)$$

definiálja (a, b, A és B valós számok). Mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy minden valós x-re $f(x) \geqq 0$ legyen?

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Feladatmegoldások (1131—1136.)

1131. Az ABC háromszög A csúcsánál levő szögének felezője AD (D a BC oldalon van). Az ABD háromszög beírt körének középpontja azonos az ABC háromszög köré írt körének középpontjával. Mekkorák az ABC háromszög szögei?

I. megoldás: Legyen K az ABC háromszög köré, illetve az ABD háromszög beírt körének középpontja *(1. ábra)*. Ekkor $AK = BK = CK$ miatt, ABK, BCK és AKC háromszögek egyenlő szárúak. Ezért a következő egyenletrendszer írható fel:

$$\frac{\alpha}{4} = \frac{\beta}{2},$$

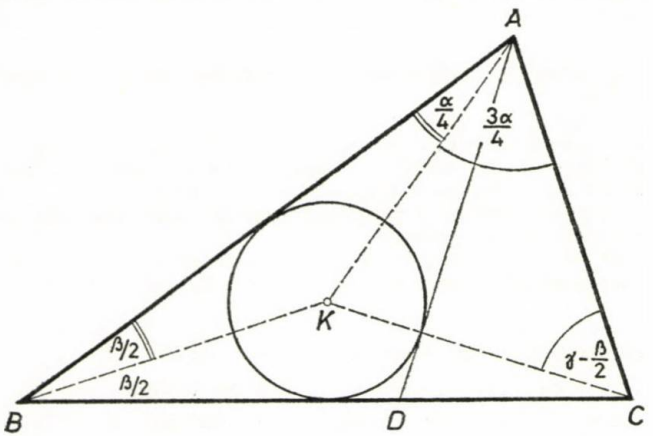
$$\frac{3\alpha}{4} = \gamma - \frac{\beta}{2},$$

és $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Az egyenletrendszert megoldva,

$\alpha = \gamma = 72°$ és $\beta = 36°$

adódik.



1. ábra

Az ABC háromszög tehát 36°-os szárszögű egyenlő szárú háromszög, s ilyen az ADC háromszög is míg az ABD egyenlő szárú háromszög szárszöge 108°.

Meg kell még mutatnunk, hogy az ilyen, tehát $ABC\sphericalangle = 36°$-os szárszögű háromszög rendelkezik a feladatbeli tulajdonsággal! Ehhez elég belátnunk, hogy ha K a háromszög köré írható kör középpontja, akkor ez egyúttal az ABD háromszögbe írható kör középpontja is, vagyis AK és BK felezi a $BAD\sphericalangle = ABD\sphericalangle = 36°$-os szöget. Mivel K az ABC egyenlőszárú háromszög szimmetriatengelyén van, ezért BK felezi az $ABD\sphericalangle$-et, és $BK = AK$ miatt $BAK\sphericalangle = 18°$, vagyis AK felezi a $BAD\sphericalangle$-et.

Bíró Bálint, Eger

II. megoldás: Az 1. ábra jelöléseit használva, a feladat feltétele szerint az ABD beírt és a ABC köréírt kör koncentrikus, ennél fogva az ABC háromszög a BK egyenesre szimmetrikus, tehát

$$AB = BC, \text{ és így } \frac{\alpha}{2} = \beta.$$

Ugyanakkor az ADC és az ABC háromszögek hasonlók, mert C-nél levő szögük közös, míg $DAC\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} = \beta$ az előbbiek miatt, tehát $AC = AD = BD$.

Ezek szerint, az $AB = BC = r + a$ és $AC = AD = BD = r$ jelölésekkel a két háromszög hasonlóságából

$$DC : AC = AC : BC,$$

azaz

$$a : r = r : (a + r)$$

adódik, ami az aranymetszés aránya, tehát CD az AC sugarú körbe beírt szabályos tízszög egy oldala, következésképpen

$$\beta = \frac{\alpha}{2} = 36° \quad \text{és ezért} \quad \alpha = \gamma = 72°.$$

Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza

A megoldók száma: 42.

1132. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan természetes szám van, amelynek köbe nem állítható elő három természetes szám négyzetének összegeként!

Varga István, Nagyszalonta

I. megoldás: A négyzetszámok 8-cal osztva 0,1 vagy 4 maradékot adnak, hiszen páros szám négyzete vagy osztható 8-cal, vagy sem és ekkor a maradék 4, míg a páratlan $n=2k+1$ négyzetére:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k(k+1)+1 = 8A+1 \quad (A \text{ egész}).$$

Ezért három négyzetszám összegét 8-cal osztva a 7 maradékként nem léphet fel. Viszont a $8k+7$ (k egész) alakú számok és köbük is 8-cal osztva 7 maradékot adnak. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Barabás Sándor, Nyírbátor,
Csorba Ferenc, Győr

II. megoldás: A bizonyításhoz felhasználjuk *Legendre* ún. háromszám tételét: Az

$$x^2+y^2+z^2 = n$$

diofantikus egyenletnek pontosan akkor van megoldása az egész számok halmazán, ha n nem $4^{k-1}(8l-1)$ alakú, ahol k és l pozitív egészek. (A tételt és a feltétel szükségességének az igazolását lásd: *Sárközy András:* Számelmélet, Műszaki Kiadó, 1976., 296. oldal.).

Legendre tételének ismeretében azt kell belátnunk, hogy végtelen sok $4^{k-1}(8l-1)$ alakú köbszám van a természetes számok között.

A $k=1$ esetet vizsgálva, a $8l-1$ alakú köbszámok csak páratlan, $2m-1$ (m pozitív egész) alakú számok köbei lehetnek. A $(2m-1)^3=8l-1$ feltételből kapjuk

$$m(4m^2-6m+3) = 4l.$$

Minthogy $4m^2-6m+3$ minden egész m-re páratlan, ezért

$$m = 4r \quad (r \text{ pozitív egész})$$

kell legyen. A $8r-1$ alakú számok köbei adják tehát a feladat feltételeinek megfelelő *összes* páratlan köbszámot. Legendre tétele szerint a páros megoldások egy 4-gyel osztható szám köbei lesznek, ezért $k=3s+1$ alakú kell legyen (s pozitív egész).

A fentiek alapján beláttuk: azok és csak azok a pozitív köbszámok nem írhatók fel három természetes szám négyzetének összegeként, amelyek

$$(*) \qquad (4^s(8l+7))^3$$

alakúak, ahol s és l nem negatív egészek.

Mivel az eredeti diofantikus egyenletben x, y és z bármelyike 0 is lehet, egyúttal azt is beláttuk: a (*) alakú számok nem lehetnek négyzetszámok és nem írhatók fel két négyzetszám összegeként sem. *Lagrange* tétele szerint minden természetes szám előállítható négy egész szám négyzetének összegeként, ami azt jelenti, hogy — a nullát is négyzetszámnak tekintve — minden természetes szám előállítható 3-nál több négyzetszám összegeként.

Kiss Géza, Kisújszállás,
Szánthó Gyula, Gyula

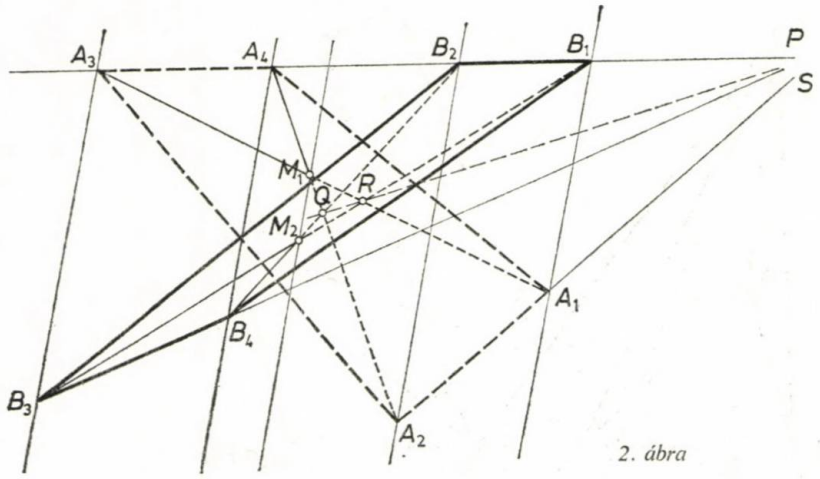
A megoldók száma: 27.

1133. Az $A_1A_2A_3A_4$ és a $B_1B_2B_3B_4$ konvex négyszögek úgy helyezkednek el egy síkban, hogy az A_3, A_4, B_1 és B_2 csúcsok kollineárisak, továbbá az A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 és A_4B_4 szakaszok párhuzamosak. Igazoljuk, hogy ha a két négyszögben az átlók M_1, illetve M_2 metszéspontjára illeszkedő egyenes párhuzamos az A_iB_i egyenesekkel, akkor az A_1A_2, A_3A_4, B_1B_2 és B_3B_4 egyenesek egy sugársorhoz tartoznak!

Számadó László, Szeged

I. megoldás: Az euklideszi sík helyett tekintsük az ideális elemekkel bővített klasszikus projektív síkot! Ekkor a párhuzamos egyenesek olyan sugársort alkotnak, melynek tartópontja ideális pont. A bizonyításból kiderül, hogy a feladat állítása akkor is igaz, ha az A_iB_i és M_1M_2 egyenesek nem ideális tartópontú sugársort alkotnak. A négyszögek konvexitása helyett csak annyit használunk fel,

hogy a csúcspontok a megadott sorrendben helyezkednek el, az átlóegyenesek metszéspontjai pedig: $A_1A_3 \cap A_2A_4 := M_1$, a illetve $B_1B_3 \cap B_2B_4 := M_2$ (ahol ez utóbbi pl. a következőt jelenti: a B_1B_3 és a B_2B_4 egyenesek metszéspontja legyen M_2). A megoldás során *Desargues* tételéből felhasználjuk a következőt: Ha két háromszög pontra nézve perspektív, akkor egyenesre nézve is perspektív (lásd pl.: *Hajós:* Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Bp. 1966., 452. oldal).



2. ábra

Az $A_3A_4M_1$ és a $B_3B_4M_2$ háromszögek *(2. ábra.)* pontra nézve perspektívek, ezért a P, Q és R pontok (ahol $A_3A_4 \cap B_3B_4 := P$, $A_4M_1 \cap B_1M_2 := Q$, $A_3M_1 \cap B_3M_2 := R$) egy egyenesre illeszkednek. Pontra nézve perspektív a $B_1B_2M_2$ és az $A_1A_2M_1$ háromszög is. $B_1M_2 \cap A_1M_1 = R$, $B_2M_2 \cap A_2M_1 = Q$ és $B_1B_2 \cap A_1A_2 := S$. A pontra való perspektivitás miatt a Q R és S pontok egy egyenesen helyezkednek el. Mivel két pont (Q és R) egyértelműen meghatározza az egyenest és A_3A_4 egyenes azonos a B_1B_2 egyenessel, ezért P azonos S-sel, vagyis a mondott egyenesek egy sugársorhoz tartoznak.

Csorba Ferenc, Győr

II. megoldás: 1. Hagyjuk el azt a feltételt, amely szerint az A_3, A_4, B_1 és B_2 pontok kollineárisak.

2. Bizonyítsuk be, hogy a feladat egyéb feltételeinek továbbra is megfelelő $A_1A_2A_3A_4$ és $B_1B_2B_3B_4$ négyszögek között tengelyes affinitás van.

3. Az A_iA_j és a B_iB_j egyenesek metszéspontját jelöljük P_{ij}-vel.

4. Vizsgáljuk meg a P_{12} és P_{34} pontok kölcsönös helyzetét, ha visszaállítjuk az eredeti $A_3A_4 \equiv B_1B_2$ feltételt! Ha $P_{12} = P_{34}$, akkor A_1A_2, A_3A_4, B_1B_2 és B_3B_4 egy sugársort alkot.

1. Hagyjuk el a feladatból azt a feltételt, amely kimondja, hogy az A_3, A_4, B_1 és B_2 csúcsok kollineárisak! Vegyük fel az $A_1A_2A_3A_4$ négyszöget tetszőlegesen, majd szerkesszük meg az átlók M_1 metszéspontját! Szerkesszünk egy i irány szerinti párhuzamosokat az A_1, A_2, A_3, A_4 és M_1 pontokon keresztül! Az így nyert megfelelő párhuzamosokon vegyük fel (tetszőlegesen) a B_1 és B_2 pontokat, valamint az M_2 pontot. *(3. ábra* a borítón.*)* Ezek után a B_3 pont az A_3-ból húzott párhuzamos és B_1M_2 egyenes metszéspontja, a B_4 pont pedig — hasonlóan — ott fekszik, ahol az A_4-ből húzott párhuzamos találkozik a B_2M_2 egyenessel.

2. Mivel az A_1, M_1, A_3, illetve a B_1, M_2, B_3 pontok kollineárisak, és az A_1B_1, M_1M_2, A_2B_2 egyenesek párhuzamosak, azért: $A_1M_1 : B_1M_2 = M_1A_3 : M_2B_3$.

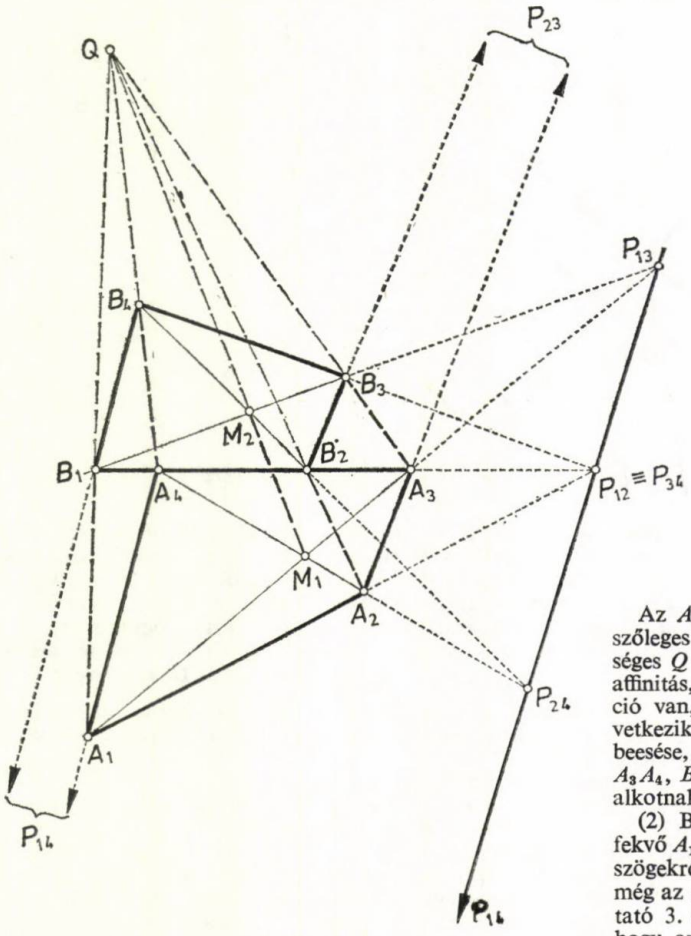
Hasonlóan érvényes, hogy az M_1 pont ugyanolyan arányban osztja fel az A_2A_4 szakaszt, mint az M_2 pont a B_2B_4 szakaszt. A párhuzamosság és az osztóviszony fennmaradása miatt tehát az $A_1A_2A_3A_4$ és a $B_1B_2B_3B_4$ négyszögek között tengelyes affinitás áll fenn.

3. Az affinitás tényéből következik, hogy a megfelelő egyenesek metszéspontjai ugyanazon az egyenesen (az affinitás tengelyén) helyezkednek el. Az A_iA_j és B_iB_j egyenesek metszéspontját jelöljük P_{ij}-vel, a P_{ij} pontokat hordozó tengelyt pedig t-vel!

4. Ha az A_3A_4 egyenes egybeesik a B_1B_2 egyenessel, (amit a feladat szövege úgy fogalmaz, hogy A_3, A_4, B_1 és B_2 kollineárisak), akkor a P_{12} pont is egybeesik a P_{34} ponttal, hiszen az affinitás tengelye általános esetben nem lehet azonos az A_3, A_4, B_1 és B_2 pontokat egyidejűleg hordozó egyenessel. A triviális esettől eltekintve tehát $P_{12} \equiv P_{34}$, ami annyit jelent, hogy az A_1A_2, $A_3A_4 \equiv B_1B_2$, B_3B_4 egyenesek ebben a kettős pontban metszik egymást, tehát egy sugársort alkotnak.

Horváth Géza, Zselíz

Megjegyzések: (1) A feladat általánosítható, ha az A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 és M_1M_2 egyenesek párhuzamossága helyett azt a feltételt adjuk, hogy a felsorolt egyenesek egy Q (közönséges vagy ideális) pontban messék egymást, vagyis egy sugársort alkossanak. Az eredeti feladat ennek nyilván speciális esete.



4. ábra

Az $A_1A_2A_3A_4$ és $B_1B_2B_3B_4$ tetszőleges négyszögek között közönséges Q pont esetén nem tengelyes affinitás, hanem tengelyes kollineáció van, amelyből ugyancsak következik a P_{12} és P_{34} pontok egybeesése, tehát az, hogy az A_1A_2, A_3A_4, B_1B_2 és B_3B_4 egy sugársort alkotnak *(4. ábra)*.

(2) Bár a feladat egy síkban fekvő $A_1A_2A_3A_4$ és $B_1B_2B_3B_4$ négyszögekről szól, a keletkező ábra (de még az általánosabb helyzetet mutató 3. ábra is) úgy is felfogható, hogy az említett négyszögek egy hasábfelület két síkmetszetét ábrázolják. A 4. ábrán pedig egy gúlafelület két síkmetszete jelenik meg. Az előbbi esetben tengelyes affinitás, a második esetben tengelyes kollineáció van a kérdéses négyszögek között.

Horváth Géza, Zselíz

A megoldók száma: 14.

1134. Legyenek (a_n) és (x_n) pozitív, egynél nem nagyobb tagú valós számsorozatok, amelyekre

$$x_1 = x \quad \text{és} \quad x_n = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_2x^2 + \frac{x}{n-1}$$

bármely $n>1$ pozitív egészre. Határozzuk meg az x értékét, ha $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$!

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

Megoldás: A $0<a_i<1$ és $0<x_i\leqq 1$ feltételekből következően két esetet kell vizsgálnunk. *1. eset:* $0<x<1$.

Ekkor, felhasználva hogy

$$\lim_{k\to\infty} x^k = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n-1} = 0,$$

$$1 = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_2 x^2 + \frac{x}{n-1} \right) = a_2 x^2,$$

azaz

$$x = \frac{1}{\sqrt{a_2}}$$

adódik. Mivel $0 < a_2 \leqq 1$ a feltétel szerint, ezért $x = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \geqq 1$; ami ellentmondás.

2. eset: $x = 1$.

Ekkor

$$x_n = 1 + a_{n-1} + a_2 + \frac{1}{n-1} \quad \text{és}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 + a_2 + \lim_{n\to\infty} a_{n-1} \geqq 1 + a_2 > 1,$$

hiszen (a_n) pozitív tagú számsorozat, és így $a_2 > 0$ és — ha egyáltalán létezik — $\lim_{n\to\infty} a_{n-1} \geqq 0$.
Ez esetben sincs tehát alkalmas x érték.

Ezzel beláttuk, hogy a feltételeket kielégítő x nincs.

Dályai Pál, Marosvásárhely, Szoldatics József, Kapuvár

Megjegyzés: A feladat sajtóhibásan jelent meg, amiért a Szerzőtől és az Olvasóktól a rovatvezető szíves elnézést kér. A feladatnak x_n-re vonatkozó feltétele helyesen:

$$x_n = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + \frac{x}{n-1}.$$

E feltétellel

$$x_1 = x, \quad \text{így} \quad x > 0,$$

$$x_2 = x^2 + \frac{x}{1}, \quad \text{ahonnan} \quad a_2 = 1 \quad \text{és} \quad x < 1,$$

$$x_3 = x^3 + x^2 + \frac{x}{2}, \quad \text{így} \quad a_3 = 1.$$

Hasonló gondolatmenettel adódik, hogy az (a_n) sorozat minden eleme 1, tehát

$$x_n = x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + \frac{x}{n-1} \quad (n > 1).$$

Hozzuk x_n-t zárt alakra:

$$x_n = x^2 \cdot \frac{1-x^{n-1}}{1-x} + \frac{x}{n-1},$$

majd képezzük $\lim_{n\to\infty} x_n$-t:

$$\lim_{n\to\infty} \left(x^2 \cdot \frac{1-x^{n-1}}{1-x} + \frac{x}{n-1} \right) = \frac{x^2}{1-x},$$

mert $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n-1} = 0$ és $0 < x < 1$ miatt $\lim_{n\to\infty} x^{n-1} = 0$.

A feltételt figyelembe véve

$$\frac{x^2}{1-x} = 1, \quad \text{ahonnan} \quad x^2 + x - 1 = 0$$

és ebből $x > 0$ miatt $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ami az aranymetszés aránya.

Fehér János, Pécs, Kamarás Lajos, Pécs

A megoldók száma: 12.

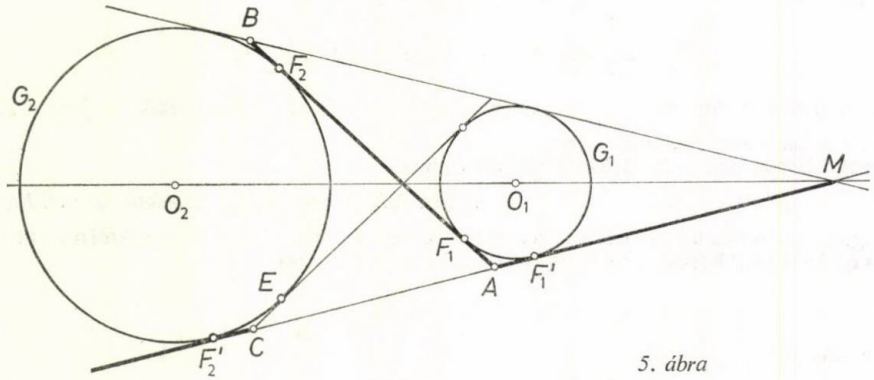
1135. Két gömb mindegyike a másik külsejében van. Tekintsük a két gömb közös külső, illetve belső érintőkúpját. Igazoljuk, hogy a két gömb közös belső érintősíkja a külső érintőkúpból olyan ellipszist metsz ki, amelynek fókuszainak távolsága egyenlő egy közös külső érintősík és a belső érintőkúp által adódó metszethiperbola csúcsainak távolságával!

Győrffy László, Miskolc

Megoldás: Az *5. ábra* síkja legyen a képsík, az érintősíkok erre merőlegesek. A belső érintők a G_1, illetve a G_2 gömböket F_1, illetve F_2 pontokban érinti, a külső érintősíkok egyike pedig az F_1' és F_2' pontokban. Ezek a szóban forgó ellipszisnek, illetve hiperbolának a fókuszai. Ennek igazolása közvetlenül kiolvasható a kúpszeletek Dandelin-féle gömbökkel való vizsgálatból (lásd: Hajós György: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, 1966., 397. oldal). Az ellipszis nagytengelye: AB, a hiperbola valós tengelye AC.

Kihasználva, hogy a gömbökhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők:

$$AF_2 = AF_2'; \quad AF_1 = AF_1' \quad \text{és} \quad CE = CF_2';$$



5. ábra

továbbá az ellipszis és a hiperbola szimmetria-tulajdonságából:

$$AF_1 = BF_2, \quad AF_1' = CF_2';$$

valamint abból, hogy az alakzat szimmetrikus a középpontokon átmenő, képsíkra merőleges síkra:

$$BF_2 = CE.$$

Az előzőek felhasználásával:

$$F_1F_2 = AF_2 - AF_1 = AF_2' - AF_1' = AF_2' - CF_2' = AC$$

adódik, ami éppen a feladat állítása.

Barta László, Nógrádmegyer, Bigus Imre, Sárospatak, Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép, Kamarás Lajos, Pécs

A megoldók száma: 23.

1136. Bizonyítsuk be, hogy bármely $k \geqq 3$ egészhez megadható a síkon k darab pont úgy, hogy bármely háromszög, amelynek csúcsai a k pontból valók, tompaszögű!

Róka Sándor, Nyíregyháza

I. megoldás: Legyen az AB átmérő kör egyik félkörívének k darab belső pontja az $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Mivel bármely három $1 \leqq i < j < h \leqq k$-ra

$$90° < A_iA_jA_h\sphericalangle < 180°,$$

hiszen félkörívnél nagyobb ívhez tartozó kerületi szög, ezért az ily módon választott k pontból való háromszög tompaszögű.

Fazekas Jánosné, Szeghalom, Hajna János, Pécs

II. megoldás: Először is egy segédtételt bizonyítunk be! Adott n darab $d_1, d_2, \ldots, d_n$ szélességű sáv. Ha ezek maximuma d és $a > \sqrt{2}\,dn$, akkor az a oldalú négyzet nem borítható be eme n darab sávval!

Ugyanis: egy sávnak az a oldalú négyzetbe eső átmérője nem lehet $\sqrt{2}\,a$-nál hosszabb, tehát az n darab sáv a négyzetből legfeljebb $\sqrt{2}\,adn$ területegységnyi részt, tehát a^2-nél kisebbet fed le.

Ezek után a pontok számára vonatkozó teljes indukcióval megkonstruáljuk a feltételt kielégítő k darab pont helyzetét. $k=3$-ra állítsunk merőlegeseket az A_1A_2 szakasz végpontjaiban, s az így kapott két, a szakaszt nem tartalmazó félsík bármelyikének, az A_1A_2 egyenesre nem illeszkedő A_3 pontja tompaszögű háromszöget ad. A tompaszög az A_1, A_2 csúcsok közül az A_3-hoz közelebbinél lesz.

Tegyük fel, hogy $k=n(\geqq 3)$-ra van kívánt tulajdonságú pont kéásunk: $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Ezek $\binom{n}{2}$ darab szakaszt, s így legfeljebb ennyi A_iA_j $(i\neq j)$ szélességű sávot határoznak meg. Legyen tehát e szakaszok (sávszélességek) legnagyobbika d. Segédtételünk szerint az $a>\sqrt{2}\,d\binom{n}{2}$ feltételnek eleget tevő a oldalú négyzetnek van olyan pontja, amelyet e sávok egyike sem tartalmaz. A segédtétel bizonyításából az is kiderül, hogy végtelen sok ilyen pont van, ezért ezek között van olyan is, amelyik az $\binom{n}{2}$ darab egyenes egyikén sincs rajta. Ilyen pontot választva $(k+1)$-ediknek, ez az $A_1, A_2, \ldots, A_k$-ból való bármely kettővel tompaszögű háromszöget ad a $k=3$-ra adott konstrukció miatt, így az indukciós feltételből kiindulva beláttuk, hogy a tulajdonság öröklődő, vagyis minden 3-nál nem kisebb k egészhez találhatni k darab pontot úgy, hogy bármely háromszög, melynek csúcsai ezek közül valók, tompaszögű.

∎

Szoldatics József, Kapuvár

III. megoldás: Legyen az A_1A_2 szakasz felező pontja F, a szakasz, mint átmérő fölé írt félkörív felező pontja G. Az FG szakasz bármely belső pontjából az A_1A_2 szakasz az $A_1GA_2\sphericalangle=90°$-nál nagyobb, de $A_1FA_2=180°$-nál kisebb, azaz tompaszögben látszik. Az FG szakasz bármely két B_3, B_4 pontjára, ha $FB_3<FB_4$, $A_1B_3B_4\sphericalangle=A_2B_3B_4\sphericalangle>90°$, mert külső szögei az A_1FB_3, illetve az A_2FB_3 derékszögű háromszögnek. Ezzel beláttuk, hogy ha az A_1, A_2 pontokhoz az FG szakasz belső pontjaiból választunk ki további $k-2$ darabot, akkor az így nyert k darab pontból, ha három egy (valódi) háromszög csúcsa, a háromszög tompaszögű.

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Megjegyzés: Az I. megoldásban látott módi alapján a k pont megadható úgy is, hogy közülük bármely három olyan háromszöget határozzon meg, melynek egyik szöge megadott α-nál $(0<\alpha<\pi)$ nagyobb legyen.

Dályay Pál, Marosvásárhely

A megoldók száma: 27.

A megoldók névsora (1131—1136.)

Bagi Gábor, Barcs (1131., 1132.); Barabás Sándor, Nyírbátor (1131., 1132., 1134., 1136.); Barta László, Nógrádmegyer (1131., 1134—1136.); Bencze Mihály, Brassó (1131—1136.); Bigus Imre, Sárospatak (1131., 1132., 1135.); Bíró Bálint, Eger (1131.); Boda Miklós, Pécs (1131., 1133.); Cseh László, Székelyudvarhely (1131., 1132., 1136.); Csete Lajos, Markotabödöge (1131., 1132., 1136. 2 mód); dr. Csorba Ferenc, Győr (1131—1133., 1135., 1136.); Dályay Pál, Marosvásárhely (1131—1136.); Fazekas Jánosné, Szeghalom (1131., 1132., 1135., 1136.); Hajna János, Pécs (1132., 1136.); Háló Judit, Debrecen (1131.); Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest (1131., 1136.); Horváth Géza, Zseliz (1131., 1133. 2 mód, 1135.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1131. 2 mód, 1132—1136.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (1131. 3 mód, 1134., 1135., 1136. 2 mód); Kamarás Lajos, Pécs (1131—1136.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (1131., 1132., 1135.); Kiss Géza, Kisújszállás (1131—1133., 1135., 1136.); Kiss Zoltán, Pécs (1131—1133., 1135., 1136.); Kosztolányi József, Szeged (1131., 1135., 1136.); Kovács Béla, Budapest (1132.); Kovácsné Gajdács Ibolya, Budapest (1131.); Kováts Péter, Budapest (1131. 2 mód, 1136.); Kun Péter, Szentendre (1132.); dr. Marosvári Péter, Budapest (1131—1136.); Merényi Imre, Börvely (1131., 1132.); Mészáros József, Galánta (1131., 1132., 1135.); Nagy Pál, Debrecen (1131.); Németh László, Fonyód (1131., 1135.); Sándor József, Farcád (1131., 1132., 1135., 1136.); Sebestyén László, Budapest (1131.); Steierlein István, Balatonfüred (1131., 1136.); Szabó Zsófia, Békéscsaba (1131., 1133., 1135., 1136.); Szántó Gyula, Gyula (1131., 1132., 1136.); Szoldatics József, Kapuvár (1131—1136.); Takács Dezső, Egyházaskozár (1131.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (1131., 1132., 1134., 1136.); Udvari Tibor, Baja (1131., 1132., 1134—1136.); Vágóné Roland Katalin, Törökbálint (1131., 1132.); Varga István, Nagyszalonta (1131., 1132.); Zalán Péterné, Budapest (1131.); Zsidó Nagy György, Kolozsvár 1131., 1133—1136.).

Új könyvek

BARTHA GÁBOR—KUN PÉTER: *Válogatott fejezetek a matematikából*, Középiskolai szakköri füzetek, Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 250 oldal, 38 Ft.

BOLLA MARIANNA: *Mátrixok spektrálfelbontásának és szinguláris felbontásának módszerei*, Budapest, 1985, SZTAKI, 118 oldal, ár nélkül .

COXETER, H. S. M.: *Projektív geometria*, Budapest, 1986, Gondolat Könyvkiadó, 179 oldal, 45 Ft.

CSISZÁR IMRE and KÖRNER JÁNOS: *Information theory, Coding theorems for discrete memoryless systems*, Budapest, 1986, Akadémiai Kiadó, 452 oldal, 420 Ft.

CZAPÁRY ENDRE: *Tanári kézikönyv a szakközépiskolák I. és II. osztályos matematika tananyagának tanításához*, (2. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 254 oldal, 35 Ft.

DEÁK ERVIN: *Tanári kézikönyv a Matematika I. kiegészítő tankönyvhöz a műszaki szakközépiskolák részére*, Budapest, 1986, Országos Pedagógiai Intézet, 124 oldal, ár nélkül.

FEKETE ISTVÁN: *Matematika és számítástechnika*, Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 205 oldal+23 oldal melléklet, 66 Ft.

FRIED KATALIN—POGÁTS FERENC: *Középiskolai matematikai versenyek 1980—1984*, Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 481 oldal, 65 Ft.

GÁDOR ENDRÉNÉ—GYAPJAS FERENCNÉ—HÁRSPATAKINÉ DÉKÁNY VERONIKA—KORÁNYI ERZSÉBET—PÁLMAY LÓRÁNT—POGÁTS FERENC—REIMAN ISTVÁN—SCHARNITZKY VIKTOR: *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából*, (3. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 478 oldal, 58 Ft.

IMRECZE ZOLTÁNNÉ—REIMAN ISTVÁN—URBÁN JÁNOS: *Fejtörő feladatok felsősöknek*, Általános iskolai tanulók számára, Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 312 oldal, 42 Ft.

KIRILLOV, A. A. (editor): *Representations of Lie groups and Lie algebras*, Budapest, 1986, Akadémiai Kiadó, 225 oldal, 280 Ft.

KÓSA ANDRÁS—MEZEI ISTVÁN—S. GYARMATI ERZSÉBET: *Analízis példatár*, Budapest, 1986. Műszaki Könyvkiadó, 415 oldal, 156 Ft.

KOVÁCS CSONGORNÉ (szerk.): *Kézikönyv a matematika 7. osztályos anyagának tanításához*, (2. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 436 oldal, 58 Ft.

LOVÁSZ LÁSZLÓ and PLUMMER MICHAEL D.: *Mathing theory*, Budapest—Amsterdam, 1986, North Holland Publ. Co. and Akadémiai Kiadó, 544 oldal, 680 Ft.

MÁRKUS LÁSZLÓ: *Algoritmus mátrix alapú logaritmus kiszámítására kriptográfiai alkalmazásokkal*, Budapest, 1986, SZTAKI, 96 oldal, ár nélkül.

MEGYERI JENŐ: *Vasúti mozgásgeometria*, Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 380 oldal, 118 Ft.

REIMAN ISTVÁN: *A geometria és határterületei*, Budapest, 1986, Gondolat Könyvkiadó, 418 oldal, 90 Ft.

SHANNON, CLAUDE E.—WARREN, WEAVER: *A kommunikáció matematikai elmélete*, Budapest, 1986, Országos Műszaki Információs Központ és Könyvtár, 183 oldal, 75 Ft.

SZIDAROVSZKI FERENC—MOLNÁR SÁNDOR: *Játékelmélet műszaki alkalmazásokkal, többcélú programozás, klasszikus és differenciajátékok*, Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 239 oldal, 75 Ft.

SZLÁVI PÉTER—ZSAKÓ LÁSZLÓ: *Módszeres programozás*, Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 116 oldal, 50 Ft.

Dr. Scharnitzky Viktor

Helyreigazítás

Lapunk ez évi 1. száma közölte *Dr. Kárteszi Ferenc* ny. egyetemi tanár: Egy Bolyai-féle véges hiperbolikus sík c. cikkét. A cikkbe — sajnálatos módon — néhány értelemzavaró sajtóhiba került. Az alábbiakban helyreigazítjuk ezeket és az elkövetett hibákért Kedves Olvasóink szíves elnézését kérjük.

A 21. oldalon alulról a 7—6. sor helyesen:

(3) *Minden P∉e pont—egyenes pár esetén a ponton áthaladó egyenesek közül m számú metszi, n számú pedig nem metszi e-t. Az (m, n)* számpárt a sík *karakterének* mondjuk.

A 22. oldalon felülről a 2—5. sor helyesen:

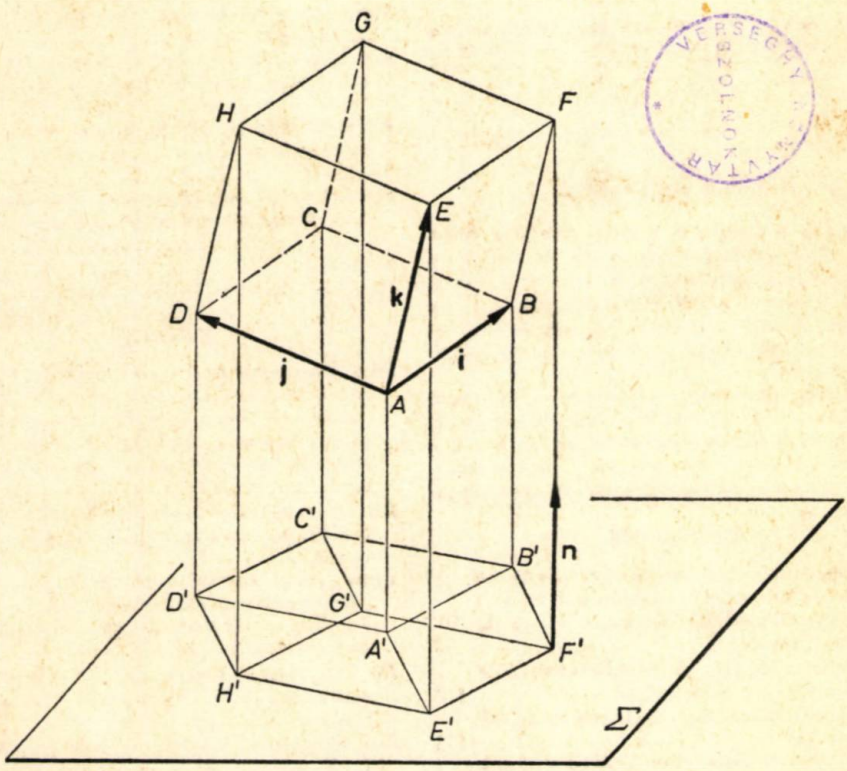
γ) A sík $(m+n)(m-1)+1$ számú pontból áll.

δ) A síknak $\dfrac{[(m+n)(m-1)+1](m+n)}{m}$ számú egyenese van.

Ára: 7,— Ft

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



VERSEGHY KÖNYVTÁR

1987. szeptember * XXXIV. évfolyam 4 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

87-3438 — Szegedi Nyomda
F. v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS

A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1 — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:

a) személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését (nyugdíjasok törzsszámukat), *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal.

TARTALOM

Biró Balázsné—Molnár Lászlóné—Salamon Éva—Tóth László: Javasolt tanmenet matematikából az általános iskola 8. osztálya számára 97
Dr Hack Frigyes: A problémamegoldás számítógépes modellezése 1 5
Rábai Imre: Készítsünk egymásra épülő feladatokat! 111
Róka Sándor: Miért nem lehet? Feladatok szakkörre 113
Dr Scharnitzky Viktor: Beszámoló az 1986—87. tanévi Hajós György Matematikai Tanulmányi Versenyről 116
KÖNYVISMERTETÉS — Vilenkin, N. J.: Kombinatorika 117
FELADATOK 118
Dr. Berényi Zsuzsanna Ágnes: Beke Manó állásfoglalása három erkölcsi kérdésben 125
ICME—6 126
ÚJ KÖNYVEK I—III. 128

СОДЕРЖАНИЕ

Биро Балажне—Молнар Ласлоне—Шаламон Ева—Тот Ласло: Рекомендуемый учебный план по математике для 8 класса общеобразовательной восьмилетней школы 97
д-р Хак Фридеш: Моделирование разрешения проблем на ЭВМ 105
Рабаи Имре: Дадайте составим задачи построенные друг на друга 111
Рока Шандор: Почему невозможно? Задачи для кружков 113
д-р Шарницки Виктор: О математическом соревновании Хайоша Дьёрдя 1987—87 г. 116
РЕЦЕНЗИЯ: Н. Й. Виленкин — Комбинаторика 117
ЗАДАЧИ 118
д-р Берени Жужанна Агнеш: Отношение Беке Мано к трем моральным вопросам 125
ICME—6 126
НОВЫЕ КНИГИ I—III. 128

INHALT

Frau Zsuzsanna Biró (geb.: *Szabó*)—*Frau Klára Molnár* (geb.: *Herczeg*)—*Frl Éva Salamon—Tóth, László:* Eine vorgeschlagene Einteilung des Lehrstoffes Mathematik in Lerneinheiten für die 8. Klasse der Grundschule 97
Dr. Hack, Frigyes: Über die Modellierung der Problemlösung mittels eines Computers 105
Rábai, Imre: Konstruieren wir Aufgaben, die sich aufeinander gründen! 111
Róka, Sándor: Warum ist es unmöglich? Aufgaben für Fachzirkel 113
Dr. Scharnitzky, Viktor: Bericht über den mathematischen Wettbewerb György Hajós im Studienjahr 1986—87 116
BUCHBESPRECHUNG — Vilenkin, N. J.: Kombinatorik 117
AUFGABEN 118
Frl Dr Zsuzsanna Ágnes Berényi: Die Stellungnahme von Manó Beke betreffs drei moralischer Fragen 125
ICME—6 126
NEUE BÜCHER I—III. ..... 12›

BÍRÓ BALÁZSNÉ—MOLNÁR LÁSZLÓNÉ—SALAMON ÉVA—TÓTH LÁSZLÓ
vezető tanár tanár vezető tanár vezető szaktanácsadó
Mosonmagyaróvár

Javasolt tanmenet matematikából az általános iskola 8. osztálya számára

A 8. osztályos matematika-tanmenet készítésénél figyelembe vettük a tantárgyi korrekcióval kapcsolatos elképzeléseket, javaslatokat. A tananyag felbontása és elrendezése során a törzsanyag mélyebb elsajátítását tűztük ki célul.

Egy-egy témakör feldolgozása előtt javasoljuk az előző ismeretek felelevenítését, amelyet a 6. vagy 7. osztályban dolgoztak fel a tanulók. Az elméleti anyag mellé feladatokat jelöltünk ki a tankönyvben és a munkalapban.

A függvénycentrikus gondolkodásra irányítottuk a figyelmet az 1. témakörnél. Az algebrai anyag megjelölésében dominál az eszközjellegű tananyag alkalmazása, elmélyítése; több gyakorló órával segítjük e cél megvalósítását. Geometriában kettős feladatot tűztünk ki; a transzformációs szemlélet kialakítását és a térbeli látás fokozását.

Az év végi ismétlés az alapvető ismeretek mérését teszi lehetővé az általános iskolai tanulókkal szemben támasztott követelmények tükrében. E rendszerezésben segítséget nyújt a Differenciált foglalkoztatás lehetőségei a 8. osztályos matematikában című megyei kiadvány második része, a középiskolára felkészítő feladatok.

Tananyagbeosztás javaslat, 8. osztály

I. *Év eleji ismétlés.*	
Műveletek racionális számokkal.	
Az algebrai ismeretek rendszerezése.	8 óra
II. *Függvények.*	
A tanultak ismétlése, rendszerezése.	
Egyenlettel adott függvény, grafikus megoldás.	
Függvénytranszformációk (2 gép).	
Kapcsolat a geometriai transzformációkkal.	
A sorozat mint függvény.	12 óra
III. *A tanult azonosságok rendszerezése, alkalmazásuk egyenletek megoldásában* (szóban szöveges).	16 óra
1. felmérő.	3 óra
IV. *Geometriai ismeretek ismétlése.*	8 óra
Testek.	20 óra
2. felmérő.	3 óra
V. *Szöveges feladatok megoldása következtetéssel és egyenlettel.*	24 óra
3. felmérő.	3 óra
VI. *Geometriai transzformációk rendszerezése, eltolás, elforgatás.*	12 óra
Hasonlóság.	6 óra
4. felmérő.	3 óra
VII. *Kombinatorika, valószínűség.*	8 óra
VIII. *Év végi rendszerező ismétlés.*	13 óra
Összesen:	139 óra

1. Az óra sorszáma	2. Aktuális tananyag-koncentráció, ismétlés, gyakorlás	3. Útmutatások
	I. *A KORÁBBAN TANULT ALGEBRAI ISMERETEK FELELEVENÍTÉSE, MÉLYÍTÉSE, RENDSZEREZÉSE.* (8 óra)	
1.	*A természetes számok és tulajdonságai.* — A természetes szám mint halmaz számossága. — Prímszámok, összetett számok (felbontás). — Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, számok osztói. — A számok normálalakja. — Kerekítés, közelítő érték.	Tk. 5—7/**1—22.**, 27/**201., 202.**, 8, 9/**31—40.**
2.	*A racionális számok.* — A negatív szám értelmezése, ábrázolása számegyenesen. — A számok ellentetje. Abszolútérték fogalma. — Egész számok nagyságrendje. — A tört kétféle értelmezése.	Tk. 7, 8/**23—28.**, 9—15/**42—102.**
3.	*Műveletek racionális számokkal I.* — Összeadás. Az összeg változásai. — Az összeg ismeretlen tagjának kiszámítása. — Az összeadás tulajdonságai (felcserélhetőség, csoportosítás). — A kivonás. A különbség változásai. — A különbség ismeretlen komponensének kiszámítása. — A kivonás mint az összeadás inverze. — Számolási egyszerűsítések összeadás és kivonás esetén. — Egynemű és különnemű kifejezések összeadása. — Az összeg hozzáadása és kivonása.	Tk. 15/**105.**, 16/**106., 111., 112.**, 17/**113—117.**, 18/**118—120., 123., 124.**, 19/**125., 130.**, 20/**134., 140.**
4.	*Műveletek racionális számokkal II.* — A szorzás értelmezése különböző számkörben. — A szorzás tulajdonságai (felcserélhetőség, csoportosítás, széttagolhatóság). — A szorzás változásai. Az ismeretlen komponens kiszámítása. — Összeg, különbség és szorzat, hányados szorzása. — Szorzás algebrai kifejezésekkel. — Az osztás értelmezése különböző számkörökben. — A hányados változásai. — Az osztás mint a szorzás inverze. — Összeg, különbség és szorzat, hányados osztása. — Az ismeretlen komponensek kiszámítása. — Egyszerűsítés a számolási eljárásokban. — Algebrai kifejezés számértékének meghatározása.	Tk. 21/**148—150.**, 22/**151—156.**, 23/**159—171.**, 24—27/**172—200.**, 27/**203.**, 28/**206.**, 22/**157., 158.**
5.	*Számok négyzete, egyéb hatványa, négyzetgyöke.* — A hatvány- és négyzetgyök-táblázat használata. — Algebrai összeg és különbség négyzete. — A 0 és a negatív szám a kitevőben. — Pitagorasz tétele.	Tk. 7. o. feladatai 29/**219—222.**, 30—32/**229—250.**, 33/**251—254.**
6.	*A tanult azonosságok rendszerezése, alkalmazása* — Az azonosságok igazolása. — Az algebrai kifejezések számértékének meghatározása. — Zárójel felbontása.	Tk. 30—34/**231—259.**, 34—36/**261—282.**
7.	*Nyitott mondatok: egyenletek, egyenlőtlenségek* — Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása grafikusan, mérlegelvvel. — Szöveges feladatok megoldása következtetéssel, egyenlettel.	Tk. 37., 38/**283.**, **300.**
8.	*Felmérés az átismételt anyagból.*	

1.	2.	3.
	II. *FÜGGVÉNYEK.* (12 óra)	
1.	*A függvényekről a korábban tanultak ismétlése, rendszerezése.* — A függvény megadása szöveggel, táblázattal, grafikonnal, képlettel. — A függvény értelmezési tartománya és értékkészlete. — A függvény ábrázolása (egyenes és fordított arányosság).	Tk. 7. o. 63—66/**81—102.**
2.	*Egyértelmű és nem egyértelmű megfeleltetés.* — Mikor adott egy függvény? — A hozzárendelés módja, formája.	Tk. 100—106/**1—40.**
3.	*Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása.* — Függvényábrázolás. — A megoldás jelölése számegyenesen.	ML. **32—36.**
4.	*A függvény transzformációja I. (2 gép összekapcsolása.)* — Lineáris, másodfokú és abszolútérték függvény eltolása az *y* (függőleges) tengely irányában.	Tk. 60—64. 110/**58—65.** 111/**68.**, , 112/**70.**
5.	*A változó érték transzformációja.* — Az előző órán vett 2 gép összekapcsolásának felcserélése. — Lineáris, másodfokú és abszolútérték-függvény eltolása az *x* (vízszintes) tengely irányában.	Tk. 65., 66. 112/**72., 73.**
6.	*A függvény transzformációja II.* (Szorzógépek; $a \geqq 0$.) — Lineáris, másodfokú és abszolútérték függvény nyújtása és zsugorítása az *y* (függőleges) tengely irányában.	Tk. 67—69. 114/**80—84.**
7.	*A függvény transzformációja III.* (szorzógépek $a < 0$). — Lineáris, másodfokú és abszolútérték függvény tükrözése az *x* (vízszintes) tengelyre.	Tk. 70—71.
8.	*Összetett függvények transzformációja.* — A transzformációk sorrendje.	Tk. 72—74. 117/**98., 99.,** 118/**100., 101.** ML. **37—39.,** **41., 44.**
9.	*Kapcsolat a geometriai transzformációkkal.*	Tk. 101/**10.,** 102/**11., 14.,** 123/**122.,** 124/**123—128.**
10.	*A sorozat mint függvény.*	Tk. 104/**19—28.**
11.	*A függvénytranszformációk gyakorlása.*	
12.	A függvényekről tanultak rendszerezése. A hiányosságok pótlása.	
	III. *A TANULT AZONOSSÁGOK RENDSZEREZÉSE ALKALMAZÁSA EGYENLETEK MEGOLDÁSÁBAN.* (Szóbeli szöveges feladat is.) (16 óra)	
1—2.	*Műveletek tulajdonságai.* — Algebrai kifejezés számértékének meghatározása pl.	Tk. 244—248. ML. **89—93.**

1.	2	3.
	a^2+3b, $x \cdot y^2$, $(2x-y)^2$, $\frac{-5a^2b}{3}$ stb. — Kommutatív művelet: összeadás, szorzás. — Asszociatív művelet: összeadás, szorzás. — Kiemelés. — Egyenletek megoldása a műveletek közötti összefüggés alapján.	Tk. 299/**1—3., 6.**, 300/**7—12.**
3—5.	*Egyszerűbb egyenletek megoldása. Ellenőrzés.* — Összevonás az egyenletben. — Egyszerű szöveges feladatok értelmezése, leírása.	Tk. 300/**18., 14—17.**, 303/**36., 37.**, 304/**38—40.**
6—8.	*Összeg és különbség kivonása az egyenletben. Ellenőrzés.* — Zárójel felbontása. — Negatív tört az egyenletben.	Tk. 300/**19.** *d)*, **20., 21.** *a), b)*, 304/**41—52.**, 305/**53.**
9—11.	*Szorzat és hányados az egyenletben. Ellenőrzés.* — Asszociativitás alkalmazása (beszorzás). — Tört eltávolítása. — Gyöktényezős egyenletek megoldása.	Tk. 301/**21.** *b), c)*, **22—24.**, 305/**54—63.**
12., 13.	*Egyenletek megoldásának gyakorlása. Ellenőrzés.* — Tört eltávolítása. — Beszorzás, zárójel bontása. — Összevonás.	Tk. 301/**25., 26.**, 302/**27., 28.**
14.	*Egyenlőtlenségek és egyszerű szöveges egyenletek megoldása. Ellenőrzés.*	ML. **95., 96.** Tk. 302/**31., 32.**, 306., 307/ **64—88.**
15.	*Tudáspróba.*	
16.	*Gyakorló óra: a hiányosságok pótlása.*	
17.	*Az 1. felmérő előkészítése.*	
18.	*Az 1. felmérő írása.*	
19.	*Az 1. felmérő javítása.*	
	IV. *GEOMETRIAI ISMERETEK ISMÉTLÉSE.* (8 óra)	
1.	*Geometriai alakzatok.* — Az alakzatok mint ponthalmazok. — Az alakzatok egymáshoz való viszonya a síkban és a térben. Távolságok értelmezése.	Tk. 38—40/**301—320.**, 44/**363—368.**
2.	*A tanult transzformációk rendszerezése.* — A tengelyes tükrözés és tulajdonságai. — A középpontos tükrözés és tulajdonságai. Tükrös alakzatok. — Szerkesztések és bizonyítások a transzformációkkal kapcsolatban.	Fejtörő feladatok felsősöknek c. feladatgyűjtemény.
3.	*A hasonlóság fogalma és tulajdonságai.* — Szerkesztések (bizonyítások) a hasonlósággal kapcsolatban.	Fejtörő feladatok felsősöknek. c. feladatgyűjtemény.
4.	*A háromszögek.* — Összefüggés a háromszög oldalai és szögei között. — A háromszög nevezetes egyenesei, pontjai, körei. — Thalesz tétele. Szerkesztések (bizonyítások). Kerület és terület számítása.	Tk. 45/**382—388.**

1.	2.	3.
5.	*A négyszögek.* — Osztályozás. Tulajdonságok. — Szerkesztések (bizonyítások).	Tk. 46/**389—400.**
6.	*Gyakorló óra.* — Ponthalmazok szerkesztése, vizsgálata. — Háromszögek és négyszögek szerkesztésének vizsgálata.	Fejtörő feladatok felsősöknek c. feladatgyűjtemény.
7.	*Felmérés az átismételt anyagból.*	
8.	*A hiányosságok pótlása.*	
	TESTEK	
1.	*Síkidomok kerületének kiszámítása.* — Háromszögek, négyszögek, sokszögek, kör.	
2.	*Síkidomok területének kiszámítása többféle módon.* — Háromszögek, négyszögek, sokszögek, kör.	
3.	*A kocka és a téglatest.* — Lapok, csúcsok, élek száma. — A felszín értelmezése, kiszámítása (mértékegységek, átváltások). — A térfogat értelmezése, kiszámítása (mértékegységek, átváltások). — (A kocka síkmetszetei.)	Tk. 230/**174.**
4., 5.	*A kocka és a téglatest felszín- és térfogatszámításra vonatkozó* feladatok.	Tk. 231/**189.**, 230/**175.**, 231/**191.**, **192.**, 230/**176.**, 231/**186—189.**, **190.**
6.	*A henger és a hasáb származtatása.* — Elnevezések. — Forgásszimmetrikus testek. — Egyenes körhenger.	Tk. 180—182. 230/**177.**, 231/**178.** ML. **83.**
7.	*A hasáb felszíne és térfogata.*	Tk. 183—186., 231/**183.**, **182.**, **184.**
8.	*Gyakorlás: A hasáb felszín- és térfogatszámítása.* — Koordináció a fizikával. — Összetett feladatok megoldása.	Tk. 231/**193.**, **195.**, 232/**196—208.**
9.	*Az egyenes körhenger felszíne és térfogata.*	Tk. 188—191. 236/**253—255.**, 237/**262.**, **263.**
10., 11.	*Gyakorlás: A henger térfogat- és felszínszámítása.* — Koordináció a fizikával. — Összetett feladatok megoldása.	Tk. 237/**264—268.** 238/**269—284.**
12.	*A kúp és a gúla származtatása.* — Elnevezések. — Forgásszimmetrikus testek. — Szabályos gúla.	Tk. 191—194. 233/**215.**, **216.**, **211.**, **212.**
13.	*A gúla felszíne és térfogata.*	Tk. 195., 196. 234/**217—219.**
14., 15.	*Gyakorlás: A gúla felszín- és térfogatszámítása.*	Tk. 234—236/**220—252.**

1.	2.	3.
16.	*A forgáskúp. A forgáskúp felszíne és térfogata.*	Tk. 197—200., 239/**287—294., 296., 297.**
17., 18.	*Gyakorlás: A forgáskúp felszín- és térfogatszámítása.*	Tk. 239/**298., 299.**, 240., 241/**301—219.**
19.	*A gömb felszíne és térfogata.*	Tk. 201—203., 242/**320—328.**
20.	*Összetett feladatok megoldása.* — A tanult testek felszíne és térfogata.	
21.	*A 2. felmérő előkészítése.*	
22.	*A 2. felmérő írása.*	
23.	*A 2. felmérő javítása.*	
	V. *SZÖVEGES FELADATOK MEGOLDÁSA KÖVETKEZTETÉSSEL ÉS EGYENLETTEL* (24 óra)	
1., 2.	*Egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása a két oldal egyenlő változtatásával. Ellenőrzés.* — Igazsághalmaz ábrázolása számegyenesen.	Tk. 299., 300/**3—17.** ML. **115., 116.** Tk. 303/**33—35.**
3., 4.	*Szöveges egyenletek megoldása. Ellenőrzés.*	Tk. 307/**80—91.**, 312/**156—159., 164., 165.**, 314/**179., 180.**
5.	*Diagnosztizálás.*	
6., 7.	*Törtegyütthatós egyenletek.* — Szöveg nélküli és szöveges egyenletek.	Tk. 313/**168., 172—174.**, 312/**156—158.**, 316., 317/**223., 224.**
8.	*Együttes munkára vonatkozó feladatok.*	Tk. 288—290., 310., 311/**129—239.** ML. **124.**
9—11.	*Mozgási feladatok megoldása.*	Tk. 285—287. ML. **117—119.** Tk. 308/**95.**, 309/**103., 107.**, 308—309/**92—108.**
12., 13.	*Helyiértékes feladatok megoldása.*	Tk. 283., 310/**113—128.**
14—16.	*Százalékszámítási és keverési feladatok megoldása.*	Tk. 290., 291. ML. **122.** Tk. 311—312/**140—154.** 313/**176—178.**
17., 18.	*Fizikai tárgyú feladatok megoldása.*	Tk. 309/**109—112.**, 312/**160—162.**, 314., 315/**189—191.**

1.	2.	3.
19—21.	*Egyéb szöveges feladatok megoldása.*	ML. **120., 121.** Tk. 304—305/**40—60.**, 313/**169., 170.**, 315—317/**196—225.**
22.	*Tudáspróba.*	
23., 24.	*Gyakorlás: a hiányosságok pótlása.*	
25.	*A 3. felmérő előkészítése.*	
26.	*A 3. felmérő írása.*	
27.	*A 3. felmérő javítása.*	

VI. *GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK RENDSZEREZÉSE, ELTOLÁS, ELFORGATÁS.* (12 óra)

1.	*Tengelyes tükrözés származtatása, tulajdonságai.* — Alakzatok tengelyes tükrözése (szakasz, egyenes, szög, síkidom). — Szerkesztések egyszerűbb esetei.	
2.	*Szerkesztések a tengelyes tükrözés felhasználásával* (bizonyítások). — Tengelyesen szimmetrikus síkidomok szerkesztése.	
3.	*A középpontos tükrözés származtatása, tulajdonságai.* — Alakzatok középpontos tükrözése (szakasz, egyenes, szög, síkidom). — Egyszerű szerkesztések.	
4.	*Szerkesztések a középpontos tükrözés felhasználásával* (bizonyítások). — Paralelogrammák szerkesztése.	
5.	*Sokszögek tengelyes és középpontos tükrözésére vonatkozó szerkesztési feladatok.* — Thálesz-tétel alkalmazás. — Érintőszerkesztési feladatok. — Síkidomok rendezése. — Számítási feladatok. — Bizonyítások.	
6.	*Az eltolás származtatása, tulajdonságai.* — Alakzatok eltolása (szakasz, síkidom). — Vektorok.	Tk. 126—131. 209/**22—26.**, 212., 213/**44—51.**
7.	*Eltolások egymásutánja, vektorok összeadása.* — Szerkesztések.	Tk. 136—140., 205—207/**1—12.**
8.	*Az elforgatás tulajdonságai.* — Alakzatok elforgatása (szakasz, síkidom). — Forgásszimmetrikus alakzatok. — Szerkesztések.	Tk. 140—142., 207/**13.**, 214/**57., 60., 63.**, 215/**64., 65.**

1.	2.	3.
9.	*Szög és elforgatottja.*	Tk. 142—145. 217/**78., 79., 82., 83.**
10.	*Az egybevágósági transzformációk összefoglalása.* — Származtatások és tulajdonságok megerősítése.	
11., 12.	*Szerkesztési és bizonyítási feladatok.* — Az eddig tanult egybevágósági transzformációk felhasználása.	ML. **67—69.** Tk. 154—162 feladatai. ML. **76., 77.** Tk. 218—219/**86—89.**
	HASONLÓSÁG. (6 óra)	
1.	*Középpontos hasonlóság és tulajdonságai.*	Tk. 162—167.
2.	*Szakasz arányos részekre osztása.*	Tk. 175—177. 229/**164., 165.**
3.	*Nagyítás és kicsinyítés szerkesztése.*	Tk. 167—170.
4., 5.	*Hasonlósággal megoldható feladatok.* — Szerkesztések, bizonyítások. — Háromszögek hasonlósági esetei.	Tk. 170—174. 223/**148—153.**, 229/**159.**
6.	*Hasonlósággal kapcsolatos számítások.*	Tk. 178., 179., 228—229/**154—157.**
7.	*A 4. felmérő előkészítése.*	
8.	*A 4. felmérő írása.*	
9.	*A 4. felmérő javítása.*	
	VII. *KOMBINATORIKA, VALÓSZÍNŰSÉG.* (8 óra)	
1., 2.	*Sorbarendezési feladatok.*	ML. **2—4., 12—14.**
3., 4.	*Többféle kombinatorikus probléma összekapcsolása.*	ML. **15—18., 20., 21.**
5., 6.	Valószínűségi játékok, a valószínűség kiszámítása.	ML. **9—11.**
7.	Statisztikai feladatok.	ML. **22., 23.**
8.	Relatív hiba kiszámítása.	ML. **24—26.**
	VIII. *ÉV VÉGI RENDSZEREZŐ ISMÉTLÉS.* (13. óra)	
1.	Műveletek racionális számokkal.	
2.	Betűs kifejezések számértékének meghatározása.	
3.	Azonosságok igazolása.	
4., 5.	Aritmetikai és számelméleti feladatok.	
6., 7.	Egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása, ellenőrzése.	
8., 9.	Geometriai szerkesztések, igazolása.	
10., 11.	Síkidomok osztályozása, területük kiszámítása.	
12., 13.	Testek felszíne és térfogata.	

DR. HACK FRIGYES
egyetemi adjunktus
ELTE TTK Matematikai Intézet, Budapest

A problémamegoldás számítógépes modellezése

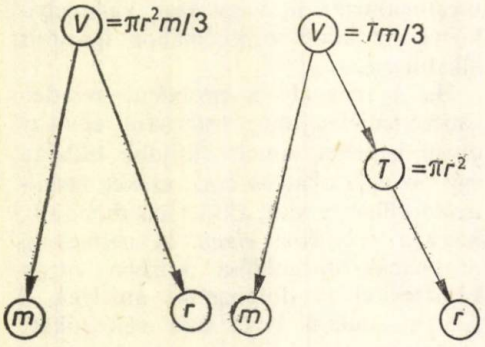
Pólya György klasszikus és remélhetőleg széles körben ismert munkáiban [1], [2] a problémamegoldás közben alkalmazható munkamódszerek és a gondolkodást segítő-tehermentesítő segédeszközök bőséges gyűjteményét kínálja. Ezek között szerepel egy gráf, amely a címben jelzett modell alapját képezi. Ennek részletes kifejtése előtt tekintsük át vázlatosan a Pólya-féle megoldási modell lényegét!

Pólya a feladatmegoldó tevékenységét négy szintre bontja: A képi szint, az összefüggések szintje, a matematikai és végül a heurisztikus szint. Vizsgálataiban ez utóbbi foglalja el a központi szerepet, s feltehetően ez az oka annak, hogy az összefüggések szintjéhez kapcsolódó gráfmodellben rejlő lehetőségeket sem ő maga, sem módszerének alkalmazói nem látták meg. A probléma megoldójának a képi szinten folytatott tevékenysége abból áll, hogy a feladat geometriai modelljét elemzi. A matematikai szinten azok a képletek szerepelnek, amelyek a megoldásban használt változók egyikének a többiből való kiszámítását adják meg. A heurisztikus szinten a megoldó önmagának feltett, a megoldásmenetet tudatosan serkentő kérdései, heurisztikus fogásai szerepelnek, mint például: mit keresünk, mivel rendelkezünk, alkalmas rokon feladat keresése stb. Végül a vizsgálatunk tárgyát képező összefüggések szintjén a megoldónak azt kell vizsgálnia, hogy a megoldás keresése közben az addig megtalált képletek olyan rendszert alkotnak-e, amely lehetővé teszi a megoldásterv elkészítését. A képletek rendszerének ugyanis — Pólyát idézve — „hidat kell verni az adatok és az ismeretlen közé". Ennek a nem mindig könnyű tevékenységnek a szemléltetésére használja Pólya a már említett gráfot.

A probléma megoldója a problémával való találkozáskor először azt tisztázza, hogy mit kell kiszámítani és miből. Ezeket a mennyiségeket elnevezi, jelölésükre egy-egy betűt, *változót* vezet be. Ezek a változók jelölik a probléma ismeretlenjeit és adatait. A megoldás további lépéseiben a megoldó a tevékenység matematikai szintjén képletekkel dolgozik. Ezek vagy az emlékezetében, vagy tankönyveiben, képletgyűjteményekben megtalálható tételek formulába öntött megfogalmazásai, vagy ezek valamelyikének az adott problémához igazított alkalmazásai.

Ha a megoldó a probléma minden ismeretlenjéhez meg tud adni egy-egy olyan képletet, amelynek jobb oldalán egy, az adatokat és csak ezeket tartalmazó kifejezés van, akkor azt mondjuk, hogy a probléma *elemi*. A nem-elemi problémák megoldása közben olyan képletekkel is dolgozunk, amelyek a feladat adatain kívül más változókat: *segédismeretleneket* is tartalmaznak. A megoldásban használt változók halmaza, amely kezdetben csak a problémakitűzés által meghatározott ismeretleneket és adatokat tartalmazta, a megoldásmenet egyes lépéseiben kibővül a megtalált képletben szereplő segédismeretlenekkel. Illusztrációként nézzünk egy nagyon egyszerű példát, amelyen egyúttal azt is láthatjuk, hogy a megoldás szer-

kezete függ a megoldótól, pontosabban annak tudásbázisától. Legyen a feladat egy m magasságú, r sugarú forgáskúp V térfogatának a meghatározása! A változók halmaza a megoldás kezdetén: $X=\{m, r, V\}$. Ha a megoldó ismeri a $V=\pi r^2 m/3$ képletet, akkor számára a probléma elemi. Tegyük fel, hogy a megoldó ezzel az ismerettel nem rendelkezik, de tudja a kúpszerű testek térfogatának kiszámítására alkalmas általános formulát: $V=Tm/3$, ahol T a test alaplapjának területe. A képlet kiválasztásával a változók halmaza $X=\{m, r, V, T\}$-re bővült. Ugyanakkor a T bevezetésével új probléma keletkezett. Ennek megoldására a megoldó a $T=\pi r^2$ területképletet használhatja, amely már nem tartalmaz új változót. A kétféle megoldásban a változók közötti összefüggéseket az 1. ábrán látható két gráf szemlélteti. Ez a Pólya által bevezetett gráf — nevezzük a továbbiakban heurisztikus gráfnak — olyan, hogy csúcsai a megoldásban előforduló változókat, az irányított élei pedig azt szemléltetik, hogy egy adott változó kiszámításához mely változók szükségesek.



1. ábra

Ha a feladat megoldója olyan „ügyetlen", hogy minden lépésben új segédismeretlent vezet be, akkor nem jut el a probléma megoldásához. A sikeres megoldás egyik feltétele tehát az, hogy a heurisztikus gráf véges legyen. Nyilvánvaló, hogy a változók száma (a csúcsok száma) és a gráf szerkezete a probléma bonyolultságától és a megoldó tudásbázisán kívül ötletgazdagságától is függ.

A példában használt T segédismeretlen kétféleképpen kerülhet be a megoldás változói közé. A *progresszív* megoldási stratégia követője az adatokból kiindulva halad az ismeretlen felé: Olyan segédismeretlent keres, amely az adatokból kiszámítható. Ezzel szemben a *regresszív* megoldásmenetet az jellemzi, hogy az ismeretlen kiszámítására keresünk olyan elemi lépést, amelyben az adatok mellett, vagy akár azok helyett más mennyiségek használatát is megengedjük. Pólya [1]-ben részletesen elemzi a két stratégiát és határozottan a regresszív módszer mellett foglal állást. A továbbiakban csak ezzel a megoldásmenettel foglalkozunk.

A regresszív megoldás két, nagyon tisztán elkülöníthető fázisból áll. Az *analízis* során a megoldó felépíti a heurisztikus gráfot, a *szintézis* fázisában pedig a gráf csúcsait meghatározott sorrendbe rendezi, azaz elkészíti a feladat megoldástervét. Látni fogjuk, hogy a szintézis egyszerűen algoritmizálható, míg az analízis a megoldótól ötleteket is kívánó tevékenység. Van azonban az analízisben is olyan tényked és, amely nem igényel intuíciót, és csupán azért nevezhetjük szellemi munkának, mert az agyunkkal végezzük. A heurisztikus gráf felépítése, és ezzel a változók közötti kapcsolatrendszer nyilvántartása csupán adminisztráció. Arra kell a megoldónak ügyelnie, hogy minden ismeretlenre és a megoldás közben bevezetett segédismeretlenre megadjon egy képletet.

Kézenfekvő, ha a tanítási gyakorlatban bevezetjük a heurisztikus gráf tudatos alkalmazását. Ennek igen egyszerű módja, ha a megoldás közben (táblánál, füzetben egyránt) rajzoltatjuk a gráfot, úgy ahogy azt az 1. ábrán láthatjuk. Bármilyen bonyolult legyen is a megoldandó probléma, a rajzos dokumentáción nyomon lehet követni, hogy hol tart a megoldás: Vannak-e még kielégítetlen hivatkozások? A kész gráf bejárása, a megoldás lépéseinek sorbarende-

zése is jól áttekinthető a rajzon. Vegyük észre, hogy a rajz készítése manuális többletmunka ugyan, de ezzel a megoldó agyát tehermentesítjük, felszabadítva szellemi erőforrásait az intuitív tevékenységek számára. Meg kell jegyezni, hogy a heurisztikus gráf ilyen módon való alkalmazása nem követeli meg gráfelméleti fogalmak tárgyalását. A felrajzolt gráf olyan szemléletesen mutatja a változók kapcsolatrendszerét, hogy szükségtelen emiatt a tananyag bővítése. Természetesen ez a pongyolaság nem vonatkozik a tanárra, ezért a továbbiakban kifejtjük a pontos modellt.

Az irányított gráf fogalmához többféleképpen juthatunk. A problémamegoldás modelljének megalkotásához legjobban a következő felépítés alkalmas: Adott az $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ halmaz és az $R \subset X \times X$ homogén, bináris reláció. Az X halmaz és az R reláció együtt egy $G=\langle X, R\rangle$ irányított gráfot határoz meg. Az X elemeit a gráf csúcsainak, az R elemeit alkotó rendezett (x_i, x_j) párokat a gráf irányított éleinek nevezzük. (Az ilyen gráf nem tartalmaz ún. többszörös éleket.) A gráf geometriai ábrázolásakor a csúcsoknak egy-egy pontot, az éleknek egy-egy irányított görbeívet feleltetünk meg, amely az élt meghatározó két csúcsot köti össze. Megadhatunk egy irányított gráfot olyan négyzetes mátrix-szal, amelyben minden csúcsot egy sor és egy oszlop reprezentál. A mátrix $\mathbf{a}_{ij}$ eleme aszerint 1 vagy Ø, hogy az (x_i, x_j) rendezett pár a gráf éle, vagy nem (2. ábra). Egy gráfot úgy is megadhatunk, hogy minden csúcsához felsoroljuk azoknak a csúcsoknak a halmazát, amelyekhez az adott csúcsból induló élek befutnak. (Szomszédsági listák.) Az $R(x_i)=\{x_r, x_s, x_t, ...\}$ csúcshalmaz az x_i csúcshoz az R által hozzárendelt csúcsok halmaza, az x_i képe vagy helyettesítési értéke.

	V	T	m	r	
V	0	1	1	0	$R(V)=\{T,m\}$
T	0	0	0	1	$R(T)=\{r\}$
m	0	0	0	0	$R(m)=\emptyset$
r	0	0	0	0	$R(r)=\emptyset$

2. ábra

A probléma analízise közben a heurisztikus gráfot ez utóbbi módon adjuk meg. Amikor találunk egy $x_i=\varphi_i(x_r, x_s, x_t, ...)$ képletet az x_i változó kiszámítására, ahol φ_i tetszőleges analitikus kifejezése az $x_r, x_s, x_t, ...$ változóknak, akkor ezzel megadjuk a heurisztikus gráf összes, x_i-ből induló élét azok $x_r, x_s, x_t, ...$ végpontjával együtt. Ha ezek a végpontok még nem fordultak elő a gráfban — még nem vettük nyilvántartásba őket — akkor ezekkel bővítjük a gráf csúcsainak halmazát: a csúcsok halmaza $X \cup R(x_i)$ lesz. A megoldásterv alapját képező heurisztikus gráfhoz az analízis során egy gráf-sorozaton keresztül jutunk el, amelynek minden eleme a heurisztikus gráf egy részgráfja. Az analízis kezdetén olyan részgráfot ismerünk, amelynek csúcsai a probléma kiszámítandó ismeretlenjei és adatai. A $G_0=\langle X_0, R_0\rangle$ részgráf élhalmaza $R_0=\emptyset$.

Rendeljünk a gráf minden csúcsához egy címkének nevezett értéket a következőképpen: Az x_i csúcs d_i címkéje legyen 1, ha ehhez a csúcshoz tartozó $R(x_i)$ képhalmaz adott, különben $d_i=0$. Világos, hogy az analízis lépésről lépésre változtatja a heurisztikus gráfról rendelkezésünkre álló információt: Csúcsok, listák, címkék. A szomszédsági listák száma minden lépésben gyarapodik. A csúcsok száma csak akkor változik, ha újabb ismeretlent tartalmaz a felhasznált képlet.

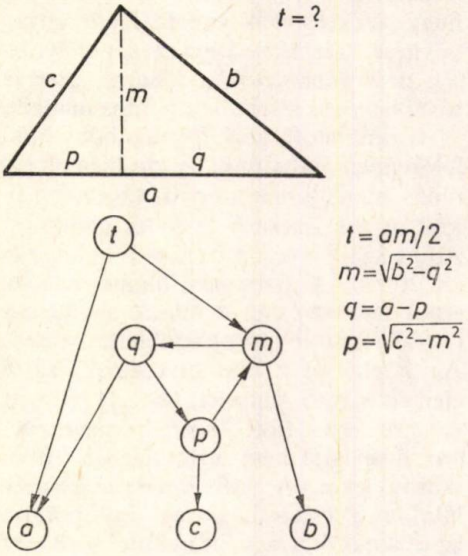
Jelölje n a heurisztikus gráf csúcsainak számát és d az adatok számát ($d<n$). A probléma analízise a G_0 gráfból kiindulva a $G_0, G_1, G_2, ..., G_{n-d}=G$ gráfsorozatot állítja elő, amelynek elemeire $G_{j-1} \subset G_j$. Az analízis algoritmusa pedig:

Kezdeti értékek: $X=X_0::=$adatok és ismeretlenek
$R=R_0::=R(x_i)=\emptyset$, ha x_i adat
$D=D_0::=$címkék; $d_i=1$, ha x_i adat, $d_i=0$ különben.

Analízis:

1. lépés: Keresünk egy $d_i=0$ címkéjű x_i csúcsot. Ha nincs ilyen, akkor vége az analízisnek.
2. lépés: Megadjuk az $R(x_i)=\{x_r, x_s, x_t, \ldots\}$ szomszédsági listát és csatoljuk R-hez.
3. lépés: Kiegészítjük a csúcshalmazt: $X=X\cup R(x_i)$.
4. lépés: Átírjuk x_i címkéjét: $d_i=1$. Folytatás az 1. lépésnél.

Ezt az algoritmust számítógépes programban is megvalósíthatjuk, és ezzel a feladatok megoldójának olyan eszközt adhatunk a kezébe, amely megkíméli a heurisztikus gráf rajzolásától is. A személyi számítógép különösen alkalmas arra, hogy a problémamegoldást támogató eszköz szerepét rábízzuk. Az analízis algoritmusát BASIC nyelven igen egyszerűen kódolhatjuk. A változóneveket egy X$(N) tömbben, a csúcsok címkéjét egy D%(N), a szomszédsági listákat pedig egy R$(N) tömbben, ahol az i-edik tömbelem az X$($i$) változóhoz tartozó változónevek láncát tartalmazza. Egy további P$(N) tömbben meg lehet őrizni a kiszámítási képleteket BASIC értékadó utasításokként.



3. ábra

Megfogalmazhatjuk a megoldási folyamat második fázisának, a szintézisnek az algoritmusát is. Ehhez előbb meg kell vizsgálnunk a heurisztikus gráf szerkezetét. A $G_0=\langle X_0, R_0\rangle$ gráfból kiindulva esetleg olyan $G=\langle X, R\rangle$ gráfhoz juthatunk, amelyből nem készíthető megoldásterv. A 3. ábrán egy ilyen példát (háromszög területének kiszámítása az oldalakból) és egyik lehetséges megoldásának heurisztikus gráfját láthatjuk. A megoldó okoskodása és a gráf felépítése logikus: A háromszög területét a $t=am/2$ képlettel akarja kiszámítani. A bevezetett m segédismeretlent a b, q szakaszokból, ez utóbbit az a, p szakaszokból, majd p-t a c, m változókból ki tudná számítani. Az analízis ezzel végetért, a heurisztikus gráf felépült. Nem tudjuk azonban a három segédismeretlent kiszámító képleteket olyan sorozatba rendezni, amelyek mindegyike csak előzőleg kiszámított változókat tartalmaz. Látható, hogy ezt a dilemmát az m, p, q csúcsokat tartalmazó részgráf okozza, melyet a G gráf körének nevezünk. E példából következik, hogy a szintézis sikerének szükséges feltétele a G körmentessége.

Bebizonyítjuk, hogy ez a feltétel elegendő is. A bizonyításhoz a következő, egyszerűen belátható lemmát használjuk fel: Minden véges, irányított, körmentes gráfban van olyan csúcs, amelyből nem indul ki él. (Az ilyen csúcsot az irányított gráf nyelőjének nevezik.)

Az analízis során a gráfot részgráfjainak sorozatával építettük fel. A szinté-

zisben lebontjuk a gráfot. Első lépésben az adatokat és csak ezeket reprezentáló nyelőket vágjuk le a hozzájuk befutó élekkel együtt. Ha $G=\langle X, R\rangle$ körmentes, akkor egyetlen részgráfja sem tartalmazhat kört. Ezért az adatok leválasztása után megmaradó $G^1=\langle X^1, R^1\rangle$ részgráf is körmentes lévén tartalmaz nyelőket. Ezek a nyelők olyan változóknak felelnek meg, amelyeknek a szomszédjait levágtuk, tehát ezek a változók az adatokból kiszámíthatók. A megoldásterv első lépéseiben ezeket a változókat számítjuk ki (tetszés szerinti sorrendben). A gráf levágását folytatva a maradék $G^2, G^3, \ldots$ gráfokban mindig találunk nyelőket, ha G körmentes volt. Mivel G véges, a levágásokkal végül a $G^k=\langle \emptyset, \emptyset\rangle$ üres gráfhoz jutunk.

Ezzel a gondolatmenettel a feltétel elégségességének bizonyítása mellett a szintézis algoritmusát is megadtuk. Ahhoz, hogy ezt az algoritmust is meg tudjuk valósítani számítógépes programban, szükségünk van arra, hogy az analízis végén rendelkezésünkre álló G gráf körmentességét ellenőrizzük. A gráf köreinek megkeresésére az irodalomból [3]—[6] többféle eljárást ismerünk. Ezek lényege abban áll, hogy a gráfot megadó R relációnak a hatványait, majd ezekből az úgynevezett elérési relációt, vagy más néven R tranzitív lezártját állítjuk elő. Az $\bar{R}$ lezárt ugyancsak az X csúcsokon értelmezett reláció: Az x_i elemhez rendelt $\bar{R}(x_i)$ képhalmaz azokat az elemeket tartalmazza, amelyekhez x_i-ből kiindulva az irányított gráfélek egymáshoz csatlakozó sorozatán át eljuthatunk. A 4. ábrán megadtuk az 1. és a 3. ábra példáihoz tartozó heurisztikus gráfok és tranzitív lezártjuk mátrix-reprezentációját. Látható, hogy az $\langle X, \bar{R}\rangle$ mátrixban a körhöz tartozó csúcsoknak megfelelő főátló-elemek mindegyike és csak ezek $\mathbf{a}_{ii}=1$.

$\langle X, R\rangle$

	V	T	m	r
V	0	1	1	0
T	0	0	0	1
m	0	0	0	0
r	0	0	0	0

$\langle X, \bar{R}\rangle$

	V	T	m	r
V	0	1	1	1
T	0	0	0	1
m	0	0	0	0
r	0	0	0	0

$\langle X, R\rangle$

	t	m	q	p	a	b	c
t	0	1	1	0	0	0	0
m	0	0	1	0	0	1	0
q	0	0	0	1	1	0	0
p	0	1	0	0	0	0	1
a	0	0	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0	0

$\langle X, \bar{R}\rangle$

	t	m	q	p	a	b	c
t	0	1	1	1	1	1	1
m	0	1	1	1	1	1	1
q	0	1	1	1	1	1	1
p	0	1	1	1	1	1	1
a	0	0	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0	0

4. ábra

Az analízis fázisában a számítógépes program a G gráfot az R szomszédsági listákkal tárolja. A körök vizsgálatához elő kell állítani a megfelelő $A=\langle X, R\rangle$ mátrixot és ebből az $\bar{A}=\langle X, \bar{R}\rangle$ mátrixot. A G szerkezetét $\bar{A}$ főátlójában álló elemek vizsgálatával elvégezhetjük. Ha minden $\mathbf{a}_{ii}=0$, akkor a gráf körmentes,

és így a szintézis, a megoldásterv összeállítása elkezdhető. Ha vannak $\mathbf{a}_{ii}=1$ elemek a főátlóban, akkor nem csupán azt állapíthatjuk meg, hogy a gráf tartalmaz köröket, hanem össze tudjuk állítani azoknak a csúcsoknak (változóknak) a halmazát is, amelyek valamelyik körön helyezkednek el. Ez az információ rendkívül fontos ahhoz, hogy az első sikertelen analízis után ne kelljen teljesen elölről kezdeni a megoldást. Ha ugyanis a körökre illeszkedő csúcsokhoz tartozó $x_i=\varphi_i(...)$ formulákat újakkal helyettesítjük, körmentes gráfot kaphatunk. A háromszög területét számító példában elég egyetlen képlet kicserélése: $q=(a^2+b^2-c^2)/2a$. Az ilyen új képletekhez leggyakrabban az $\mathbf{a}_{ii}=1$ elemekhez tartozó $x_i=\varphi_i(...)$ egyenletekből álló egyenletrendszer átalakításával juthatunk el. Sor kerülhet azonban új ötletek és esetleg további segédismeretlenek bevezetésére is. Mindezt úgy végezhetjük, hogy a G gráf köröket nem tartalmazó része, illetve arról az első analízis közben összegyűjtött információink nem változnak.

A körmentes heurisztikus gráf tranzitív lezártját reprezentáló $\bar{A}$ mátrix alkalmas arra, hogy a szintézist automatizáljuk. A G gráf lebontását a számítógépes program a következőképpen végezheti: A csúcsok levágása a gráfot ábrázoló mátrix megfelelő sorainak és oszlopainak elhagyásával valósítható meg. Ehhez meg kell keresni a gráf nyelőit reprezentáló sorokat. Az $\bar{A}$ mátrixban ezek a csupa 0 elemből álló sorok, ugyanis a nyelőkből egyetlen más csúcshoz sem vezetnek utak. A nyelőknek megfelelő sorok *és* oszlopok törlése után kapott $\bar{A}^1$ gráf nyelői lesznek a megoldási terv soron következő lépéseiben kiszámítható változók.

Ha a számítógépes program a változók szomszédsági listáin kívül a képleteket is tárolja, akkor ezeknek a képleteknek a szintézis által megállapított sorrendje a probléma numerikus számításait elvégző program magja. Ezt a magot az adatokat beolvasó INPUT és az eredményeket kiíró PRINT utasításokkal kiegészítve a probléma megoldását adó számítógépes programhoz jutunk.

Végezetül egy jogosan felvethető kérdésről: Mi történik akkor, ha a feladat megoldója valamelyik változó kiszámítására nem tud megfelelő összefüggést megadni? Nos a válasz egyszerű: A gép ebben nem tud segíteni. A probléma megoldása a megoldótól ötleteket, valamilyen tudásbázist és a munkához szükséges adminisztratív ténykedést igényel. A megoldáshoz felhasznált eszköz, a támogatást adó program csupán az adminisztrációt tudja átvállalni. Bonyolult problémák esetén ez nem kevés, de nem minden. Nagy tárolóval rendelkező számítógépes rendszerben a tudásbázis (képletgyűjtemény) tárolható, az intuíció azonban ekkor is az ember gondolkodási tevékenysége marad.

Ha az Olvasó nem mer vállalkozni a megoldást támogató program elkészítésére, akkor annak egy, HT—1080Z-re kidolgozott változatát az OOK programgyűjteményében HEURÉKA néven megtalálhatja.

Felhasznált irodalom

[1] PÓLYA GYÖRGY: *A problémamegoldás iskolája* (TK 1968).
[2] PÓLYA GYÖRGY: *A gondolkodás iskolája* (Bibliotheca 1957).
[3] KEMENY—SNELL—THOMPSON: *A modern matematika alapjai* (MK 1977).
[4] NIERVELGELT—FARRAR—REINGOLD: *Matematikai problémák megoldásának számítógépes módszerei* (MK 1977).
[5] WARSHALL, S.: *Theorem on Boolean Matrices* (J. ACM 9/1962).
[6] CHRISTOFIDES, N.: *Graph Theory and Algorithmic Approach* (Acad. Press, London 1975).

RÁBAI IMRE
egyetemi adjunktus
Budapesti Műszaki Egyetem

Készítsünk egymásra épülő feladatokat!

A tanítás folyamatának egyik része az önálló feladatok elvégeztetése. Gyakran megesik, hogy a tanuló a feladatot nem tudja megoldani, jóformán hozzá sem tud kezdeni. Tankönyveink, példatáraink talán kevés egyszerű, egy-két logikai lépéssel megoldható feladatot tartalmaznak. Alapvetően fontos, hogy a feladatok egymásra épüljenek, logikai láncot alkossanak. Ilyenek természetesen találhatók a tankönyvekben, példatárakban, de úgy gondolom, hogy többre lenne szükség. E folyóirat egyik feladata lehet az, hogy a tanításhoz közvetlen segítséget adjon. A példatáraimban gyakran jelentek meg az előző szellemben szerkesztett feladatok. Ezek a feladatok egyben alkalmasak bizonyos módszerek megismertetésére.

Természetesen ezek a tanítás, az ellenőrzés folyamán kitűzött feladatoknak csak egy részét képezhetik, hiszen az ilyen irányító munkához nem szabad nagyon hozzászoktatni a tanulókat.

A továbbiakban tekintsünk meg néhány, ebben a szellemben összeállított feladatsorozatot!

1. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\cos 2x = 0$; *b)* $\sin 2x = \frac{1}{2}$;

c) $\sin^2 2x = \frac{1}{4}$; *d)* $\sin 4x - \cos 2x = 0$;

e) $4\sin^2 2x - 8\sin 2x + 3 = 0$ (felvételi feladat);

f) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 8\sin 2x$ (felvételi feladat).

(Szorgalmi feladat.

1. *a)* $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2\sin 2x$, *b)* $3\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x = 4\sin 2x$.)

2. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$; *c)* $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$;

b) $\cos\frac{\pi}{6}\sin x - \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{1}{2}$; *d)* $\operatorname{tg} x = \frac{1+\cos x}{\sqrt{3}-\sin x}$ (felvételi feladat).

(Szorgalmi feladat

2. *a)* $\sin x - \cos x = 1$ *b)* $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}-\cos x}{1+\sin x}$).

3. Oldja meg a következő egyenletrendszereket:

a) $\left.\begin{aligned}\sin(x+y) &= 1,\\ \sin(x-y) &= -\frac{1}{2};\end{aligned}\right\}$ *b)* $\left.\begin{aligned}\sin x\cos y &= \frac{1}{4}\\ \cos x\sin y &= \frac{3}{4};\end{aligned}\right\}$ *c)* $\left.\begin{aligned}\sin x\cos y &= \frac{1}{4},\\ 3\operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} y.\end{aligned}\right\}$

Szorgalmi feladat.

3. *a)* $\left.\begin{aligned}\cos x\cos y &= \frac{3}{4},\\ 3\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}y &= 0;\end{aligned}\right\}$ *b)* $\left.\begin{aligned}\sin x\cos y &= \frac{3}{4},\\ \operatorname{tg}x\operatorname{ctg}y &= 3.\end{aligned}\right\}$

4. *a)* Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket!

(1) $x^2-x-6 \geqq 0$; (2) $\dfrac{x-3}{x+2} \geqq 0$.

b) Oldja meg a következő egyenleteket!

(1) $\sqrt{(6+x-x^2)^2} = x^2-x+6$; (2) $\left|\dfrac{3-x}{2+x}\right| = \dfrac{x-3}{x+2}$.

c) Mely valós x számokra értelmezhetők a következő kifejezések?

(1) $\lg(x^2-x-6)$; (2) $\lg\dfrac{x+2}{x-3}$.

(Szorgalmi feladat.
4. *a)* Oldja meg a következő egyenleteket:

(1) $|-12+5x+2x^2| = -2x^2+5x+12$; (2) $\sqrt{\left(\dfrac{x+4}{2x-3}\right)^2} = \dfrac{x+4}{3-2x}$.

b) Mely valós számokra értelmezhetők a következő kifejezések?

(1) $\log_2(-2x^2-5x+12)$; (2) $\log_2\dfrac{x+4}{3-2x}$.

5. Oldja meg a következő egyenleteket!

a) $(3x-1)(x+2) = (2x+3)(x+2)$; *b)* $\dfrac{\sqrt{3x^2+5x-2}}{\sqrt{2x^2+7x+6}} = 0$;

c) $\sqrt{3x^2+5x-2}+\sqrt{2x^2+7x+6} = 0$; *d)* $\lg\sqrt{3x^2+5x-2} = \lg\left(-\sqrt{2x^2+7x+6}\right)$;

e) $2^{\sqrt{3x^2+5x-2}} = \dfrac{1}{2^{\sqrt{2x^2+7x+6}}}$; *f)* $\sqrt{3x^2+5x-2}\cdot\sqrt{2x^2+7x+6} = 0$.

(Szorgaimi feladat.
5. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\sqrt{2x^2-3x-2} = -\sqrt{3x^2-7x+2}$; *b)* $\sqrt{2x^2-3x-2}\cdot\sqrt{3x^2-7x+2} = 0$;

c) $\lg(2x^2-3x-2) = \lg(3x^2-7x+2)$; *d)* $(2x^2-3x-2)\sqrt{3x^2-7x+2} = 0$.)

6. *a)* Mely valós a számokra igaz, hogy

(1) $|a|-a = 0$; (2) $|a|+a = 0$.

b) Hol helyezkednek el az (x, y) síkon azok a $P(x; y)$ pontok, amelyek koordinátái kielégítik a következő egyenleteket:

(1) $|x+y-1| = x+y-1$; (2) $|x+y-1| = 1-x-y$.

c) Milyen (x, y) valós számpárok esetén értelmezhetők a következő kifejezések?

(1) $\sqrt{x+y-1}$; (2) $\lg(1-x-y)$.

(Szorgalmi feladat.

6. *a)* Hol helyezkednek el az (x, y) síkon azok a $P(x; y)$ pontok, amelyek koordinátái kielégítik a következő egyenletet:

$$x^2+y^2-4+|x^2+y^2-4| = 0.$$

b) Milyen $(x; y)$ valós számpárok esetén értelmezhető a következő kifejezés?

$\lg(4-x^2-y^2)$.)

7. *a)* Mikor igazak a következő azonos egyenlőtlenségek? Mikor áll fenn az egyenlőség?

(1) $a^2+b^2 \geqq 0$; (2) $a^2+b^2+c^2 \geqq 0$;

(3) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqq 0$; (4) $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$;

b) Igazolja, hogy ha $a<b<c$ valós számok, akkor az

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a) = 0$$

másodfokú egyenletnek két különböző valós gyöke van! (Felvételi feladat.)
(Szorgalmi feladat.

7. Oldja meg a következő egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 3, \\ xy+yz+zx &= 3. \end{aligned}\right\}$$

RÓKA SÁNDOR
főiskolai tanársegéd
Bessenyei György Tanárképző Főiskola, Nyíregyháza

Miért nem lehet? Feladatok szakkörre

Mottó: „... egy matematikai feladattal éppoly jól el lehet szórakozni, mint egy keresztrejtvénnyel, ... az erőteljes szellemi munka ugyanolyan jó dolog, mint egy erős teniszjátszma. Ha valaki egyszer megízleli a matematika örömét, nem fogja egykönnyen elfelejteni."

Pólya György

A matematikában tehetséges tanulókkal való foglalkozásnak része a diákok ötletgazdagságának, gondolkodási rugalmasságának fejlesztése, érdeklődésük ébren tartása. Az itt következő feladatok alkalmasak lehetnek erre a célra, s többnyire egyszerű eszközökkel megoldhatók. A feladatsor segítheti munkánkat a tehetségkutatásban, a tehetségesek kiválasztásában.

Feladatok

1. Miért nem lehet megoldani az $a \cdot b \cdot (a+b) = 1987$ egyenletet az egész számok körében?
2. Miért nem lehet megoldani az $1986^x + 1987^y = 1988^z$ egyenletet a pozitív egész számok körében?
3. Miért nem lehet egy 30 fős osztályban írt dolgozat átlaga 4,15?
4. Miért nem lehet megoldani az $n^{k+1} = (n+1)^k$ egyenletet a pozitív egész számok körében?

5. Miért nem lehet négy egész szám összege is, szorzata is páratlan?

6. Miért nem lehet a $6x+15y=14$ egyenletet megoldani az egész számok körében?

7. Miért nem lehet egyszerre egész $\frac{n+1}{15}$ és $\frac{n+8}{21}$?

8. Miért nem lehet egy kétjegyű szám egyenlő jegyeinek szorzatával?

9. Miért nem lehet $\sqrt{2}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}$?

10. Miért nem lehet két prímszám összege 101?

11. Miért nem lehet olyan prímszámot találni, amely után pontosan tíz összetett szám van a következő prímszámig?

12. Miért nem lehet az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat két csoportra osztani úgy, hogy a két csoportban levő számok összege egyenlő legyen?

13. Miért nem lehet az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat két csoportra osztani úgy, hogy a két csoportban levő számok szorzata egyenlő legyen?

14. Miért nem lehet az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok valamilyen sorrendjével felírt szám prímszám?

15. Miért nem lehet az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok valamilyen sorrendjével felírt szám négyzetszám?

16. Miért nem lehet $10^{100}+10^{50}+1$ szám prímszám?

17. Miért nem lehet $10^{100}+10^{50}+1$ szám négyzetszám?

18. Miért nem lehet $1!+2!+3!+\ldots+100!$ szám prímszám?

19. Miért nem lehet $1!+2!+3!+\ldots+100!$ szám négyzetszám?

20. Miért nem lehet $10^{1987}+5$ szám négyzetszám?

21. Miért nem lehet $3+3^2+3^3+\ldots+3^{1987}$ szám négyzetszám?

22. Miért nem lehet az 111...1 szám (100 darab 1-es) négyzetszám?

23. Miért nem lehet egymást követő számok szorzata 1987?

24. Miért nem lehet három egymást követő szám szorzata 1988?

25. Miért nem lehet két egymást követő pozitív egész szorzata négyzetszám?

26. Miért nem lehet négy egymást követő szám mindegyike hatványszám?

27. Miért nem lehet négy egymást követő pozitív egész szorzata négyzetszám?

28. Miért nem lehet három egymást követő pozitív egész szorzata négyzetszám?

29. Miért nem lehet három egymást követő pozitív egész szorzata köbszám?

30. Miért nem lehet három egymást követő szám összege 1987?

31. Miért nem lehet $n!+7$ $(n\neq 2)$ szám négyzetszám?

32. Miért nem lehet n^5-n+2 szám négyzetszám?

33. Miért nem lehet $n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ szám prímszám?

34. Miért nem lehet $n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ szám négyzetszám?

35. Miért nem lehet p^2+8 szám prímszám, ha p 3-tól nagyobb prím?

36. Miért nem lehetnek az $n+5$, $n+7$, $n+15$ számok egyszerre prímszámok?

37. Miért nem lehet egy egész együtthatós polinom minden egész helyettesítési értéken felvett értéke prímszám?

38. Miért nem lehet az első kilenc prímszámból 3×3-as bűvös négyzetet készíteni?

39. Miért nem lehet az $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ szám egész szám?

40. Miért nem lehet az $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ szám egész szám?

41. Miért nem lehet az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{12}$ számok előjelét úgy megválasztani, hogy összegük nulla legyen?

42. Miért nem lehet $x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+\ldots+x_{50}\cdot x_1=0$, ha tudjuk, hogy x_i értéke 1 vagy -1?

43. Miért nem lehet az $(a_1-1)\cdot(a_2-2)\ldots(a_{99}-1)$ szorzat páratlan, ha tudjuk, hogy az $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_{99}$ számok az $1, 2, \ldots, 99$ számok egy permutációját alkotják?

44. Miért nem lehet az $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$ egész számok szorzata páratlan, ha tudjuk, hogy összegük nulla?

45. Miért nem igaz az $(1+1986!)\cdot(1+1987!)=(1986+1987)!$ egyenlőség?

46. Miért nem lehet a 7 777 777 777 szám osztóinak száma 1987?

47. Miért nem lehet megoldani a $2^{\sin^2 x}=\sin x$ egyenletet?

48. Miért nem lehet gömbre háromszöget rajzolni?

49. Miért nem lehet egy 13 oldalú szabályos sokszög csúcsai közül ötöt úgy kiválasztani, hogy ezek közt bármely két csúcs távolsága különböző legyen?

50. Miért nem lehet az $1, 2, 3, \ldots, 20$ számokból tizet úgy kiválasztani, hogy a belőlük képzett kéttagú összegek értékei különbözzenek egymástól?

Útmutatások a feladatok megoldásához

1. Az egyenlőség bal oldalán páros szám áll.

2. Az egyenlőség bal oldalán egy páros és egy páratlan szám összege, jobb oldalán pedig egy páros szám áll.

3. A megadott esetben az osztályzatok összege nem egész szám.

4. Az egyenlőség egyik oldalán páros, másik oldalán páratlan szám áll.

5. Négy egész szám szorzata csak akkor páratlan, ha mindegyikük páratlan, s ennek a négy számnak az összege páros lesz.

6. Az egyenlőség bal oldalán álló szám osztható hárommal.

7. A két számláló közül legfeljebb az egyik osztható hárommal.

8. $\overline{xy}=10x+y\geqq 10x>x\cdot y$.

9. Az egyenlőség jobb oldalán racionális szám áll.

10. Az összeadandók közül az egyik páros, a másik páratlan. A páros összeadandó csak 2 lehet, ezért a páratlan 99, s ez nem prím.

11. Két páratlan prímszám közt levő egész számok száma páratlan.

12. A megadott számok összege páratlan.

13. A megadott számok szorzata nem négyzetszám, hiszen a szorzatban van olyan prím, a 7, amely páratlan kitevőn szerepel.

14. A felírt szám számjegyeinek összege osztható 3-mal, ezért maga a szám is osztható 3-mal.

15. A felírt szám számjegyeinek összege, s maga a szám is osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel.

16. A szám számjegyeinek összege 3, a szám osztható 3-mal.

17. A szám osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel.

18. Az összeg első két tagjának összege 3, a többi összeadandó mindegyike osztható 3-mal.

19. Az összeg első négy tagjának összege 3-ra végződik, a többi összeadandó osztható 10-zel, ezért az összeg utolsó számjegye 3.

20. A szám osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel. Más indoklás: a szám osztható 5-tel, de nem osztható 25-tel.

21. A szám osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel.

22. A szám 4-gyel osztva 3 maradékot ad.

23. Egymást követő számok szorzata páros.

24. Három, egymást követő szám szorzata osztható 3-mal.

25. $n^2<n\cdot(n+1)<(n+1)^2$.

26. A négy, egymást követő egész szám közt van két páros szám, s ezek egyike 2-nek csak az első hatványával osztható.

27. $n(n+1)(n+2)(n+3)=(n^2+3n+1)^2-1$.

28. $(n-1)n(n+1)=n\cdot(n^2-1)$, n és n^2-1 relatív prímek, ezért szorzatuk csak akkor négyzetszám, ha mindkét szorzó négyzetszám. Azonban n^2-1 nem lehet négyzetszám.

29. $n^3<n\cdot(n+1)(n+2)<(n+1)^3$.

30. Három, egymást követő szám összege osztható 3-mal.

31. Ha n nagyobb 4-nél, akkor $n!$ osztható 10-zel, s az $n!+7$ szám 7-re végződik.

32. A szám mindig 2-re végződik.

33. $n^4+2n^3+2n^2+2n+1=(n^2+1)(n+1)^2$.

34. $(n^2+n)^2<n^4+2n^3+2n^2+2n+1<(n^2+n+1)^2$.

35. A szám osztható 3-mal, ugyanis $p^2+8=(p-1)(p+1)+9$.

36. A számok közül az egyik mindig osztható 3-mal.

37. Az $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ polinomban a_n nyilván prímszám (végezzük el az $x=0$ helyettesítést), ekkor $x=a_n$ helyettesítésre a polinom értéke már nem lesz prímszám.

38. Egy 3×3-as bűvös négyzetben a számok összege osztható 3-mal, míg az első kilenc prímszám összege nem osztható 3-mal. Más megoldás: a kilenc szám közt csak egy páros van, ezért a 3×3-as négyzet egyik sorában a számok összege páros, míg a másik kettőben páratlan.

39. Az összeg értéke 1-nél nagyobb, 2-nél kisebb.

40. Keressük meg a törtek legkisebb közös nevezőjét, s hozzuk a törteket erre a közös nevezőre! Egy kivételével mindegyik számláló páros lesz, ezért ha a törteket összeadjuk, a kapott tört számlálója páratlan, nevezője páros, s ezért a tört értéke nem egész szám.

41. A számok összege nem egész szám. Ez úgy indokolható, mint az előző feladatban.

42. Ha a megadott összeg nulla, akkor az 50 összeadandóból 25 értéke -1, 25 értéke 1, ezért az 50 összeadandó szorzata -1. Azonban $(x_1x_2)\cdot(x_2x_3)\ldots(x_{50}x_1)=(x_1x_2\ldots x_{50})^2=1$.

43. A szorzótényezők közt van egy páros, mivel a 99 számból 50 páratlan, ezért két páratlan szám közös zárójelbe kerül.

44. Ha 99 egész szám összege nulla, illetve páros szám, akkor a 99 összeadandó közt van páros szám, ezért a szorzat páros.

45. Az egyenlőség bal oldalán két páratlan szám szorzata áll, míg a jobb oldalon páros szám.
46. Egy szám osztóinak száma pontosan akkor páratlan, ha a szám négyzetszám.
47. A bal oldalon álló függvény értéke legalább 1, a jobb oldalon állóé legfeljebb 1. Az 1 értéket a két oldalon álló kifejezés különböző helyettesítési értékekre veszi fel.
48. A háromszög síkbeli alakzat, s a gömb minden síkmetszete kör.
49. A 13 oldalú sokszög csúcsai 6 különböző távolságot határoznak meg, s 5 pont 10 távolságot határoz meg.
50. 10 számból $\binom{10}{2}=45$ kéttagú összeg képezhető. A megadott számokból készíthető legnagyobb kéttagú összeg 39.

DR. SCHARNITZKY VIKTOR
tanszékvezető főiskolai tanár
Könnyűipari Műszaki Főiskola, Budapest

Beszámoló az 1986—87. tanévi Hajós György Matematikai Tanulmányi Versenyről

A Hajós György Matematikai Tanulmányi Verseny 1986/87 tanévi versenyét az Ybl Miklós Építőipari Műszaki Főiskola rendezte meg Budapesten 1987. március 20-án és 21-én. A versenyen a műszaki főiskolák és a műszaki egyetemek főiskolai karai nappali tagozatos hallgatóinak egy-egy négytagú csapata vehet részt. A versenyt két kategóriában hirdetik meg: a *csapatversenyt* az egyes csapatok három, a legtöbb pontot szerzett tagjának összpontszáma dönti el, az *egyéni versenyben* mindenki saját elért pontjával szerepel.

Az idei, sorrendben tizenharmadik versenyen 15 csapat 58 tagja vett részt. A kitűzött feladatokat a Versenybizottság állította össze a versenyt megelőző napon azokból a feladatokból, amelyeket a főiskolák erre a célra beküldtek. A versenybizottság elnöke az idén Kecskés Attila főiskolai docens volt. A kiválasztott öt feladat helyes megoldásáért összesen 100 pontot lehetett kapni.

A kitűzött feladatok

1. Az $x^3+px+q=0$ harmadfokú egyenlet együtthatói, p és q egész számok, és az egyenlet egyik gyöke $x_1=2+\sqrt{7}$. Bizonyítsa be, hogy az egyenlet egy másik gyöke $x_2=-4$. Határozza meg az egyenlet harmadik gyökét!

(15 pont)

2. Egy négyzetalapú gúla minden éle „a" hosszúságú. Határozza meg annak a síkidomnak a területét, amelynek csúcsai a négyzetalap egyik átlójának két végpontjából kiinduló oldalélek felezőpontjai, valamint ugyanazon átló két végpontjából kiinduló alapélek felezőpontjai!

(20 pont)

3. Az $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot a következőképpen definiáljuk: $a_1=5$, $a_{n+1}=a_n^2$ $(n=1;2;\ldots)$. Bizonyítsa be, hogy a_n és a_{n+1} utolsó n jegye megegyezik!

(20 pont)

4. Melyek azok a valós f függvények, amelyekre tetszőleges valós x, y esetén igaz, hogy:

$$f(x-y)-f(x)\cdot f(y)=f(x)\cdot\cos y+f(y)\cdot\cos x-\sin x\cdot\sin y.$$

(20 pont)

5. Egy társaságban minden férfi ismer legalább egy nőt, de egyetlen férfi sem ismer minden nőt, és ugyanúgy minden nő ismer legalább egy férfit, de nem ismer

minden férfit. (Az ismeretség kölcsönös.) Bizonyítsa be, hogy kiválasztható a társaság résztvevői közül két férfi és két nő úgy, hogy a két férfi mindegyike a két nő közül csak az egyiket ismeri (és ugyanúgy a két nő mindegyike is csak az egyik férfit ismeri a kettő közül)!

(25 pont)

A csapatverseny első három helyezettje

1. **Ybl Miklós Építőipari Műszaki Főiskola,** Budapest (158 pont),
2. **MN Kilián György Repülő Műszaki Főiskola,** Szolnok (135 pont),
3. **Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola,** Budapest (125 pont).

Az első helyezett csapat egy évig birtokolhatja a Hajós György Matematikai Tanulmányi Verseny Vándorserlegét.

Az egyéni verseny első tíz helyezettje

1. **Tran Thu Trang** (MN Kilián György Repülő MF, Szolnok) 62 pont.
2. **Domszky Zoltán** (Ybl Miklós Építőipari MF, Budapest) 60 pont.
3. **Bittner János** (Könnyűipari MF, Budapest) 58 pont.
4. **Balázs László** (Pollack Mihály MF, Pécs) 54 pont.
5. **Le Van Hien** (MN Kilián György Repülő MF, Szolnok) 52 pont.
6. **Nghyen Quoc Hung** (MN Zalka Máté Katonai MF, Budapest) 50 pont.
7. **Hacsek Tamás** (Ybl Miklós Építőipari MF, Budapest) 50 pont.
8. **Bakos János** (Gépipari Automatizálási MF, Kecskemét) 49 pont.
9. **Szabados Zsolt** (MN Zalka Máté Katonai MF, Budapest) 48 pont.
10. **Gyuricza László** (Ybl Miklós Építőipari MF, Budapest) 48 pont.

A felsorolt csapatok és versenyzők pénz-, illetve könyvjutalmat kaptak.

A Versenybizottság **Balázs László** (Pollack Mihály Műszaki Főiskola, Pécs) dolgozatát a harmadik feladat élesítéséért külön dicséretben részesítette. A legjobb női versenyző címet **Bánsági Szilvia** (Ybl Miklós Építőipari Műszaki Főiskola, Debrecen) nyerte el.

Az ünnepélyes eredményhirdetés előtt **Császár Ákos** akadémikus emlékezett meg Hajós György munkásságáról.

KÖNYVISMERTETÉS

Vilenkin, N. J.: KOMBINATORIKA (2. kiadás)
(Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 358 oldal, 76 Ft.)

A könyv első kiadása 1971-ben jelent meg és sikert aratva rövid idő alatt elfogyott. Újabb kiadása már régóta esedékes, és a kiadás időszerűségét az is indokolja, hogy a matematikatanárok két éve megindult továbbképzésében több előadássorozathoz is ajánlott tankönyv.

A könyv hét fejezetre oszlik. Az első fejezet *(Az általános kombinatorikai szabályok)* a kombinatorika általános, az összeadásra és szorzásra vonatkozó szabályaival és a kombinatorikai feladatok megoldásánál gyakran alkalmazott logikai szitával foglalkozik. A második feje-

zet tárgyalja a hagyományos iskolai anyagot: a permutációkat, a kombinációkat, a variációkat. A harmadik fejezetben *(Különleges korlátozásokat tartalmazó kombinatorikai feladatok)* olyan feladatokról van szó, amelyekben a vizsgált variánsok a legkülönbözőbb megszorításoknak tesznek eleget. Ez az az anyagrész, ahol a tárgyi tudás mellett egyre inkább előtérbe lép a logikus gondolkodás, az ötlet, a kombinatív készség. A negyedik fejezet *(Partíciós problémák)* olyan felbontási feladatok megoldásával és az ehhez szükséges elmélettel foglalkozik, amely a különböző szempontok szerint csoportokba osztható elemek elrendezéséről szól. Itt esik szó a kombinatorikában alkalmazott geometriai módszerekről is. Az ötödik fejezet *(A sakktábla kombinatorikája)* főtémája különböző bolyongási feladatok megoldása, illetve ezeknek a legkülönbözőbb területeken való alkalmazása. Itt van szó a Pascal-féle háromszög különféle módosításaival kapcsolatos feladatokról is. A hatodik fejezet *(Rekurzív összefüggések)* a rekurzió fogalmának illusztrálása és néhány rekurzív összefüggésre, illetve ennek megoldására vezető feladat bemutatása után a rekurzív összefüggések általános elméletével foglalkozik. A hetedik fejezet *(Kombinatorikus analízis)* a generátor függvény módszerével és ennek alkalmazásával foglalkozik, és részletesen tárgyalja a binomiális és polinomiális tételt.

A könyv lényeges értékét jelenti a 439 számozott (lényegében több, mint ötszáz) feladat és ezek megoldása. A feladatok között van könnyű gyakorló feladat, és meglehetősen nehéz, az olvasó gondolkodásmódját és idejét alaposan próbára tevő feladat is.

A könyvvel kapcsolatban három körülményre érdemes felfigyelni. Az első az, hogy a könyv a megszokottnál lényegesen több ismeretanyagot nyújt, a második az, hogy az ismertetett anyagot feladatokon keresztül mutatja be rendkívül olvasmányos, népszerű stílusban, ami a matematikában kevésbé járatos olvasók számára is könnyen olvashatóvá és érthetővé teszi a szöveget, de nem megy a pontosság és szabatosság rovására, a harmadik pedig az, hogy nagyon sok klasszikus feladatot, sőt történetet tartalmaz a könyv, ami szórakoztató olvasmánynak sem utolsó.

A fordítás Rejtő Lídia munkája, aki a lektorral, Sárközy Andrással együtt több, mint félszáz jegyzettel is emelte a kötet értékét.

Dr. Scharnitzky Viktor

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10. II. 10. 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1161. Egy utcaszakasz egyik oldalán, saroktól sarokig a házszámok összege 117. Mi a szakasz elejétől számított ötödik háznak a házszáma?

1162. Az egymást kívülről érintő O_1, O_2, közepű k_1, k_2 körök közös belső érintője e körök egyik külső érintőjét az A pontban metszi. Az AO_1 egyenes a k_1 kört a P

és Q, az AO_2 egyenes a k_2 kört az R és S pontban metszi (A P és R pontok az A-hoz közelebbiek). Igazoljuk, hogy a P, Q, R és S pontok egy körön vannak! Az AQS és az APR háromszögek területének aránya milyen körökre minimális?

Varga István, Nagyszalonta

1163. Számítsuk ki a következő összeget:

$$\sum_{k=3}^{98} \binom{k-1}{2}\binom{100-k}{2}.$$

Csúri József, Szeged

1164. Melyek azok a p és r nem negatív egészek, amelyekre

$$\sin^p x - \sin^r x = \cos^p x - \cos^r x$$

minden valós x-re?

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

1165. Egy konvex poliédert 8 darab egységnyi oldalú szabályos háromszöglap és 2 darab párhuzamos síkú négyzetlap határol. Számítsuk ki a test térfogatát!

1166. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív a, b valós számokra

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n - (\sqrt{ab})^n \geqq \left(\frac{a^{\frac{n}{2}} - b^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}}\right)^2.$$

ahol n pozitív egész szám.

D. P. Mavló, Moszkva

Feladatmegoldások (1137—1142.)

1137. Barna úrhoz és feleségéhez Barnánéhoz három házaspár érkezik vendégségbe. Az örömteli találkozás alkalmából egyesek kezet is fognak egymással. Senki sem fogott kezet azonban a saját házastársával. Barna úr utóbb mindenkitől megkérdezte, hogy hány jelenlevővel fogott kezet. Kérdésére (amelyet hétszer tett fel, hiszen rajta kívül heten voltak a szobában) csupa különböző választ kapott. Hány vendéggel fogott kezet Barnáné?

I. megoldás: Mivel Barna úr csupa különböző választ kapott, ezek csak a 0, 1, 2, 3, 4, 5 és 6 lehettek, hiszen önmagával és házastársával senki sem fogott kezet. Barnáné nem foghatott hat jelenlevővel kezet, mert akkor a 0 válasz nem hangozhatott el, de az sem fordulhatott elő, hogy Barnáné senkivel sem fogott kezet, mert akkor Barna úr a 6 választ nem hallotta volna. Legyen A, aki a 6-os választ adta. Házastársa A^* nem foghatott kezet senkivel, mivel a 0 válasz elhangzott és A mindenkivel, akivel tehette, kezet fogott. Ha most a A, A^* házaspárt „elhagyjuk" kézfogásaikkal együtt, s Barna úr a megmaradtakat kérdezi, ismét csupa különböző választ kap. Ezek most: 0, 1, 2, 3 és 4. Barnáné kézfogásainak száma a 0 vagy a 4 nem lehet, ezt előbbi módon igazolhatjuk. Legyen most C az aki a 4-es (eredetileg az 5) választ adta. Ekkor C házastársának C^*-nek kellett a 0 (eredetileg az 1) választ adnia. C-ék és kézfogásaik elhagyásával, az eljárást megismételve, a most adott válaszok 0, 1 és 2. Az előbbiekhez hasonlóan: a 0 vagy a 2 (mostani, eredetileg a 2 és a 4) választ Barnáné nem adhatta férjének, mert ellenkező esetben ellentmondásra jutunk. Ezek szerint Barnáné most csak az 1-et mondhatta, eredetileg tehát 3 vendéggel fogott kezet, még pedig a három házaspár pontosan egy-egy tagjával.

Csorba Ferenc, Győr

II. megoldás: Először bebizonyítjuk az alábbi állítást: Ha az n-csúcsú ($n \in \mathbf{N}$, $n \geqq 2$) egyszerű gráf csúcsainak a fokszámai között az 1, 2, ..., $n-1$ számok mindegyike előfordul, akkor a gráfnak két $\left[\frac{n}{2}\right]$-ed fokú csúcsa van (a többi csúcs fokszáma természetesen mind különböző). A bizonyítást

teljes indukcióval végezzük. Az állítás $n=2$ és $n=3$ esetén igaz (ez könnyen ellenőrizhető). Tegyük fel, hogy az állítás valamely k-nál ($k\in\mathbf{N}$, $k\geqq 4$) kisebb egész számokra már igaz, s megmutatjuk, hogy akkor az állítás a k és a $k+1$ egész számra is igaz.

Legyen a $k+1$ csúcsú egyszerű gráf X csúcsa elsőfokú, Y csúcsa pedig k-adfokú. Hagyjuk el a gráfból az X és Y csúcsokat a hozzájuk csatlakozó élekkel együtt. Ekkor olyan $k-1$ csúcsú gráfot nyerünk, amely eleget tesz a bizonyítandó állítás $k-1$ csúcsú gráfra vonatkozó feltételeinek, így ebben két $\left[\frac{k-1}{2}\right]$-edfokú csúcs van (a többi csúcsa különböző fokszámú). Ha most visszavesszük az előzőleg elhagyott csúcsokat és éleket, akkor az eredeti gráfot kapjuk, s abban két $\left(\left[\frac{k-1}{2}\right]+1\right)$-edfokú csúcs van (a többi csúcs mind különböző fokszámú), hiszen az X és Y visszavétele során minden tőlük különböző csúcs fokszáma eggyel nőtt. Mivel pedig $\left[\frac{k-1}{2}\right]+1=\left[\frac{k+1}{2}\right]$, azért az állítás valóban igaz. Teljesen hasonlóan, ugyancsak teljes indukcióval bizonyítható az alábbi állítás is: Ha a $2n$-csúcsú egyszerű gráf csúcsait diszjunkt párokba sorolhatjuk úgy, hogy az azonos párokban levő csúcsok nem szomszédosak, továbbá a csúcsok fokszámai között a $0, 1, \ldots, 2(n-1)$ számok mindegyike előfordul, akkor az azonos párokban levő csúcsok fokszámösszege minden esetben $2(n-1)$. Ennek bizonyítását itt mellőzzük.

Ha most a társaság minden tagjának egy-egy szögpontot, és valamennyi kézfogásnak egy-egy, a kézfogásban érintetteket megjelenítő pontokat összekötő vonalat (élt) feleltetünk meg, akkor a két fentebbi állításból következik az **1137.** feladat egy általánosítása:

Barna úrhoz és feleségéhez, Barnánéhoz n házaspár érkezik és a találkozás alkalmából egyesek kezet fogtak egymással, de senki sem fogott kezet saját házastársával. Barna úr utóbb mindenkitől megkérdezte hány jelenlevővel fogott kezet, s ha e kérdésre csupa különböző választ kapott, akkor ő és felesége egyaránt n vendéggel fogott kezet.

Csúri József, Szeged

A megoldók száma: 33.

1138. Kétszáz állításunk közül az első százból az i-edik: „legalább i állítás igaz" ($1\leqq i\leqq 100$), a további százból a $100+k$-adik: „legalább k állítás hamis" ($1\leqq k\leqq 100$).
Eme kétszáz állítás közül, melyek igazak és melyek nem?

Megoldás: Legyen a a legnagyobb olyan szám, amelyre igaz a „legalább a állítás igaz" kijelentés, míg b a legnagyobb olyan szám, amelyre igaz a „legalább b állítás hamis" kijelentés. Ekkor az első száz állításból a számú, a következő százból b számú igaz, összesen tehát $a+b$ számú igaz és $200-(a+b)$ számú hamis kijelentésünk van. Ezek szerint

$$200-(a+b)\geqq b. \tag{1}$$

Ha $a<100$ lenne, akkor az $(a+1)$-edik állítás az első hamis kijelentés, tehát a következő $100-(a+1)$ állítás is hamis, vagyis a hamis állítások száma legalább $100-a$, és ezért a $(200-a)$-adik állítás igaz. Ennél fogva legalább $a+1$ igaz állítás van, tehát az $(a+1)$-edik állítás igaz, ami az a definíciójának ellentmond. Az a tehát csak 100 lehet. Ekkor (1) miatt

$$200-(100+b)\geqq b,$$

azaz rendezés után

$$b\leqq 50. \tag{2}$$

Feltételeink szerint az utolsó 100 állításból $100-b$ kijelentés hamis, és ezek közül az első (vagyis a $(100+b+1)$-edik állítás): „legalább $b+1$ állítás hamis". Tehát a hamis állítások száma $(b+1)$-nél nem nagyobb, vagyis

$$100-b\leqq b+1,$$

azaz

$$\frac{99}{2}\leqq b,$$

ennélfogva (2) miatt $b=50$ kell legyen.

A kétszáz állítás közül tehát az első 150 igaz, míg a további 50 hamis kell legyen.

Szoldatics József, Kapuvár
Zsidó-Nagy György, Kolozsvár

Megjegyzés: Feltettük, hogy a 200 állítás magára a 200 állításra vonatkozott. Általában is, ha $4n$ állítás közül az első $2n$-ből az i-edik: „legalább i állítás igaz", a további $2n$-ből a $(2n+k)$-adik: „legalább k állítás hamis", akkor az első $3n$ darab állítás igaz, a többi n darab állítás hamis. Ennek bizonyítása a fentiekkel analóg módon történhet.

Szoldatics József, Kapuvár

A megoldók száma: 14.

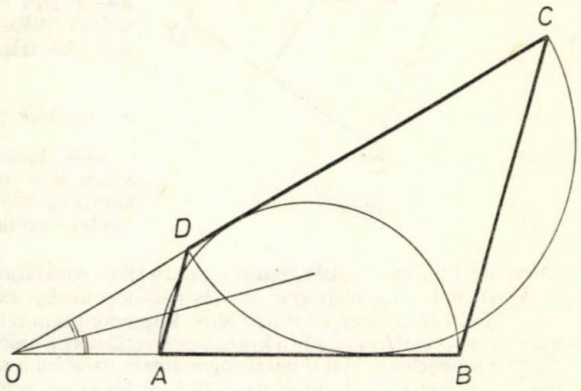
1139. Az $ABCD$ konvex négyszögben a CD oldal egyenese érinti az AB átmérőjű kört. Bizonyítsuk be, ha $AD \parallel BC$, akkor az AB egyenes érinti a CD átmérőjű kört!

I. megoldás: Ha $AB \parallel CD$ is fennáll, akkor a négyszög paralelogramma, és ennek centrálszimmetrikus voltából következik az állítás.

Ha $AB \nparallel CD$, akkor egyenesük közös pontját jelölje O. A párhuzamos szelők tételéből *(1. ábra)*, az $AD \parallel BC$ miatt

$$OA : AB = OD : DC,$$

tehát az $AOC\triangleleft$ felezőjére vonatkozó tükrözés, majd az ezt követő O közepű $\frac{OD}{OA}$ arányú hasonlóság az AB szakaszt a DC-be, az AB átmérőjű CD egyenest érintő kört ezek képébe, a DC átmérőjű AB egyenest érintő körbe viszi. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.



1. ábra

Oláh György, Rév-Komárom,
Tóth György, Szolnok

II. megoldás: Jelölje az AB, illetve a CD szakaszok felező pontját M, illetve N, és ezeknek a CD, illetve az AB egyenesen levő vetületét M', N' *(2. ábra)*. Azt fogjuk bizonyítani, hogyha $AD \parallel BC$, akkor az ABN háromszög t_{ABN} területe ugyanakkora, mint a CDM háromszög t_{CDM} területe. Ebből pedig a feladat állítása következik, mert a két háromszög területének egyenlőségéből

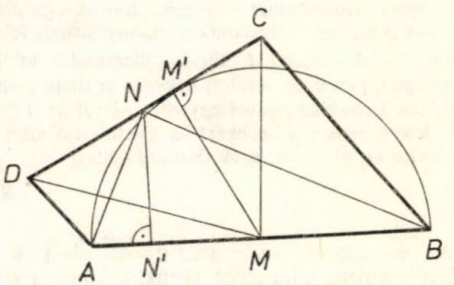
$$AB \cdot NN' = CD \cdot MM', \tag{1}$$

ha az AB átmérőjű kör érinti a CD egyenest, akkor $AB = 2 \cdot MM'$ és ezt (1)-gyel egybevetve a $CD = 2 \cdot NN'$ adódik, ami éppen azt jelenti, hogy a CD átmérőjű kör érinti az AB egyenest. Mivel

$$t_{ABN} = t_{ABCD} - t_{ADN} - t_{BCN}$$

és

$$t_{CDM} = t_{ABCD} - t_{ADM} - t_{BCM},$$



2. ábra

ezért, ha igazoljuk a jobb oldalon álló megfelelő kivonandók egyenlőségét, készen vagyunk. Az $AD \parallel BC$ miatt M és N az $ABCD$ trapéz középvonalán van, tehát e pontoknak az alapoktól való távolságai egyenlők, és ezért

$$t_{ADN} = t_{ADM}, \; t_{BCN} = t_{BCM},$$

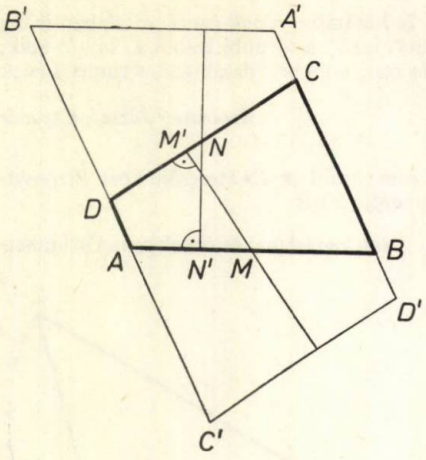
ennélfogva

$$t_{ABN} = t_{CDM}.$$

Dályay Pál, Marosvásárhely

III. megoldás: Az előbbi megoldás jelöléseivel: ha az $ABCD$ trapézt tükrözzük az AB szakasz M illetve a CD szakasz N felezőpontjára, akkor a nyert két $CDC'D'$ illetve $ABA'B'$ paralelogramma területe egyenlő *(3. ábra)*, tehát

$$CD \cdot 2 \cdot MM' = AB \cdot 2 \cdot NN'.$$



3. ábra

A feltétel szerint $AB=2\cdot MM'$, amit előbbiben felhasználva a

$$CD = 2\cdot NN'$$

egyenlőségre vezet, és ez a feladat állítását alátámasztja.

Bagi Gábor, Barcs,
Kiss Sándor, Szatmár

Megjegyzés: A feladat lényegében azonos a XXV. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 1984. évi prágai versenyének 4. feladatával (lásd pl.: *Fried Katalin—Pogáts Ferenc:* Középiskolai Matematikai Versenyek 1980—1984., Tankönyvkiadó 1986., 473. oldal. 84.4. feladat!).

Oláh György, Rév-Komárom

A megoldók száma: 33.

1140. Igazoljuk, hogy az egységkocka valamely síkon levő merőleges vetülete területének a mérőszáma egyenlő egy, a vetületi síkra merőleges egyenesen levő vetületének a hosszával!

Megoldás: Először foglalkozzunk a kokca síkra vonatkozó merőleges vetületével. A kocka ismert tulajdonságaiból és a merőleges vetítés párhuzamosság- és aránytartó voltából (elfajuló eseteket kivéve) következik, hogy a vetületi idom középpontosan szimmetrikus sokszög: téglalap, vagy hatszög, s hogy a vetületi sokszög a kockalapok vetületének uniójaként fogható fel. Mivel a négyzetlapok vetületei (legfeljebb elfajuló) paralelogrammák, továbbá a szemköztes lapok vetületei (legfeljebb elfajuló) paralelogrammák, továbbá a szemköztes lapok vetületei egybevágók és a vetületi sokszög szimmetriaközéppontjára nézve egymás tükörképei, ezért a vetületi sokszög területe megkapható bármely három, egy csúcshoz csatlakozó kockalap vetülete területének összegeként is (4. ábra, I. a borítón).

Ha a kockát a vetületi síkkal párhuzamos két sík közé „szorítjuk", akkor mindig található egy testátló, amelynek egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik „határoló" síkra illeszkedik.

Tehát, ha a kockát egy, a vetületi síkra merőleges egyenesre *merőlegesen* vetítjük, akkor vetületét — mint ponthalmazt — megkaphatjuk egy alkalmasan választott testátló vetületeként is. Rátérve most a feladat állításának a bizonyítására, feltehetjük az általánosság megszorítása nélkül, hogy a vetületi sík a kocka A csúcsára illeszkedik. Jelölje a kocka $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ egységnyi hosszú élvektorait rendre $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$. A vetületi sokször területe előbbiek alapján az A-ra illeszkedő négyzetlapok vetületeinek területösszegével egyenlő. Mivel az A csúcsú egységnégyzetek egy területvektora éppen az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ vektorok egyike, ezért ha a vetületi S síkra merőleges egységvektor $\mathbf{n}$, akkor a vetületek területe rendre $\mathbf{ni}$, $\mathbf{nj}$ és $\mathbf{nk}$, ezek összege pedig:

$$\mathbf{n}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}).$$

Az $\overrightarrow{AG}$ átlóvektornak, azaz $\mathbf{d}=\overrightarrow{AG}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ vektornak az S síkra merőleges $\mathbf{n}$ egységvektoron levő vetülete, mint előbb láttuk, egyúttal a kocka vetülete is az egységvektoron, és ennek előjeles hossza kettejük skalárszorzata:

$$\mathbf{n}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}).$$

Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Dr. Marosvári Péter, Budapest,
Zalán Péterné, Budapest

A megoldók száma: 13.

1141. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a

$$2^x+2^y-1=3^z$$

egyenletet.

Varga István, Nagyszalonta

Megoldás: Az egyenlet x és y változóiban szimmetrikus, ha tehát (x, y, z) az egyenletnek egy megoldása, akkor az (y, x, z) is az. A továbbiakban feltesszük, hogy $x \geqq y$. Először vizsgáljuk a $z \leqq 2$ eseteket. Ha $z=0$, akkor egyenletünk rendezés után

$$2^x + 2^y = 2.$$

Mivel $x \geqq y \geqq 0$, ezért $2^x \geqq 2^y \geqq 1$, tehát a bal oldal legalább 2, ezért az egyenlőség pontosan akkor áll, ha $2^x = 2^y = 1$, vagyis $x=y=0$.
Ha $z=1$, akkor a

$$2^x + 2^y = 4$$

megoldásait keressük. Az $y \neq 0$, különben $2^x = 3$ lenne, de ez x egészre lehetetlen. Ennélfogva $2^x + 2^y \geqq 4$ és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $2^x = 2^y = 2$, vagyis $x=y=1$. Ha pedig $z=2$, akkor egyenletünk a

$$2^x + 2^y = 10.$$

Most $x \geqq y$ miatt $0 \leqq y \leqq 2$ lehet csak. Az $y=0$ vagy 2 mellett $10-2^y$ osztható 3-mal de 2^x nem, így $y=1$ lehet csak. Ekkor $2^x = 8$, vagyis $x=3$ kell legyen.

Ezzel beláttuk, hogy a $0 \leqq z \leqq 2$ feltétel mellett pontosan négy megoldása van egyenletünknek $(0, 0, 0)$; $(1, 1, 1)$; $(3, 1, 2)$ és $(1, 3, 2)$.

Bebizonyítjuk, hogy $z > 2$ esetén az egyenletnek nincs megoldása. Feltételünkből következik, hogy $x \geqq y > 2$ kell legyen, ezért a $2^x + 2^y$ osztható 8-cal.

Ha z páros, azaz $z=2k$ ($k \geqq 2$ egész), akkor

$$3^z + 1 = 3^{2k} + 1 = 9^k + 1 = (8+1)^k + 1,$$

vagyis a bal oldal 8-cal osztva 2-t ad maradékul, míg

$$z = 2k+1 \text{ esetén}$$

$$3^z + 1 = 3 \cdot 9^k + 1 = 3(8+1)^k + 1,$$

ami 8-cal osztva 4 maradékú.

Nincs tehát egyenletünknek több megoldása.

Kovács Béla, Szatmár,
Kun Péter, Szentendre

A megoldók száma: 17.

1142. Mutassuk meg, hogy ha $x+y+z=a$ és $xy+yz+zx=b$, akkor

$$\max(x, y, z) - \min(x, y, z) \leqq \frac{1}{2}\sqrt{6(a^2-3b)}.$$

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x \leqq y \leqq z$. Ekkor

$$\max(x, y, z) - \min(x, y, z) = z - x,$$

továbbá

$$z - x \geqq z - y \geqq 0 \quad \text{és} \quad z - x \geqq y - x \geqq 0.$$

Ezért egyrészt

$$A = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \leqq 3(z-x)^2,$$

másrészt

$$A = 2(x^2+y^2+z^2) - 2(xy+yz+xz) = 2\big((x+y+z)^2 - 3(xy+yz+xz)\big) = 2(a^2-3b),$$

és ezekből

$$2(a^2-3b) \leqq 3(z-x)^2.$$

Mivel $A \geqq 0$, ezért

$$\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{a^2-3b} \leqq z-x. \tag{1}$$

A $z-x=(z-y)+(y-x)$ miatt egyfelől

$$(z-x)^2 = (z-y)^2 + (y-x)^2 + 2(z-y)(y-x) \leqq 2\big((z-y)^2 + (y-x)^2\big),$$

hiszen $(u-v)^2 \geqq 0$-ból $2u^2+2v^2 \geqq u^2+2uv+v^2$ adódik, másfelől így mindkét oldalhoz $2(z-x)^2$-t adva:

$$3(z-x)^2 \leqq 2\big((z-x)^2 + (z-y)^2 + (y-x)^2\big) = 2A = 4(a^2-3b),$$

vagyis

$$z-x \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{a^2-3b}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) együttesen a

$$0 \leqq \frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{a^2-3b} \leqq z-x \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{a^2-3b} \leqq \frac{1}{2}\sqrt{6(a^2-3b)} \tag{3}$$

egyenlőtlenséglánchoz vezet, ami több és élesebb a feladatban kitűzöttnél.

Cseh László, Székelyudvarhely,
Sándor József, Farcád

Megjegyzések: **1.** A bizonyításból kiolvasható, hogy az (1)-ben az egyenlőség pontosan akkor áll, ha $x=y=z$, azaz $a^2=3b$, míg (2)-ben akkor és csak akkor, ha $y=\frac{x+z}{2}$. Az $a^2=3b$, illetve az $x=y=z$ az egyetlen olyan eset, amikor a feladatbeli felső korlát egybeesik a (2)-beli felső korláttal.

Dályay Pál, Marosvásárhely

2. Fentiekkel analóg módon igazolható: ha $\sum_{i=1}^{n} x_i=a$ és

$$\sum_{1\leqq i<j\leqq n} x_i x_j = b, \quad \text{ahol} \quad n \geqq 2, \quad \text{akkor}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\frac{2(n-1)}{n}a^2-4b} \leqq \max x_i - \min x_j \leqq \sqrt{\frac{2(n-1)}{n}a^2-4b}.$$

Az is következik eme egyenlőtlenséglánc̈ból, hogy a fenti feltételeknek eleget tevő $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós számok pontosan akkor egyenlők, ha

$$(n-1)a^2 = 2nb.$$

Cseh László, Székelyudvarhely

A megoldók száma: 23.

A megoldók névsora (1137—1142.)

Bagi Barnabás, Barcs (1137.); Bagi Gábor, Barcs (1137., 1139., 1142.); Barta László, Nógrádmegyer (1137., 1139. 2 mód, 1140.,); Bencze Mihály, Brassó (1137. 2 mód, 1138. 2 mód, 1139. 4 mód, 1140—1142.); Bigus Imre, Sárospatak (1139. 2 mód); Bíró Bálint, Eger (1139.); Boda Miklós, Pécs (1139., 1142.); Cseh László, Székelyudvarhely (1137., 1138., 1141., 1142.); Csorba Ferenc, Győr (1137., 1139—1142.); Csúri József, Szeged (1137. 2 mód, 1138—1142.); Dályay Pál, Marosvásárhely (1137—1142.); Gáspár Jánosné, Sajókaza (1137.); Hajdú Ferenc, Nagykálló (1137., 1138.); Hajna János, Pécs (1138., 1139., 1141., 1142.); Horávth Géza, Zseliz (1139.); Horváth Tibor, Dunakeszi (1137., 1139.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1137. 2 mód, 1139—1142.); Kamarás Lajos, Pécs (1137—1142.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (1139., 1140.); Kiss Géza, Kisújszállás (1137—1139., 1142.); Kiss Sándor, Szatmár (1137., 1139.); Kovács Béla, Szatmár (1137., 1139., 1141.); Kovácsné Gajdács Ibolya, Budapest (1137.); Kováts Péter, Budapest (1137.); Kun Péter, Szentendre (1137., 1141.); Dr. Marosvári Péter, Budapest (1137—1142.); Merényi Imre, Bőrvely (1137., 1138., 1141., 1142.); Mészáros József, Galánta (1137., 1139., 1142.); Németh László, Fonyód (1139. 2 mód, 1140., 1142.); Nyitrai Tanítóképző Főiskola, mat.-mezőgazd. szakos II. évf. hallgatói (1137.); Oláh György, Rév-Komárom (1137., 1139. 3 mód, 1142.); Sallai István, Zilah (1137., 1139., 1141.); Sándor József, Farcád (1138—1142.); Steierlein István, Balatonfüred (1137., 1139.); Sugár György, Budapest (1137.); Szántó Gyula, Gyula (1137., 1139., 1142.); Szoldatics József, Kapuvár (1137., 1138., 1139. 2 mód, 1140—1142.); Terhesné Dudás Rozália, Csongrád (1137., 1139.); Tóth György, Szolnok (1139.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (1137., 1139., 1141., 1142.); Varga István Nagyszalonta (1139. 2 mód, 1141., 1142. 3 mód); Zalán Péterné, Budapest (1137., 1139., 1140., 1142.); Zsidó-Nagy György, Kolozsvár (1137—1139., 1142.).

Lapunk 1986. évi legeredményesebb feladatmegoldóit könyvjutalomban részesítettük:

Bencze Mihály, Brassó
Dr. Csorba Ferenc, Győr
Dályay Pál, Marosvásárhely
Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza
Kamarás Lajos, Pécs
Kiss Géza, Kisújszállás
Dr. Marosvári Péter, Budapest
Sándor József, Farcád
Szoldatics József, Kapuvár
Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

DR. BERÉNYI ZSUZSANNA ÁGNES
középiskolai tanár
Budapest

Beke Manó állásfoglalása három erkölcsi kérdésben

125 éve, 1862. április 24-én született Pápán Beke Manó, a magyar matematikaoktatás egyik legnagyobb alakja. Életéről, kiemelkedő szakmai tevékenységéről dr. Hajnal Imre írt sok újat adó, alapos, élvezetes tanulmányt 1986-ban. A jeles munka értékelve ismerteti Beke Manó középiskolai, majd egyetemi oktatását, kitér kiváló tankönyveinek bemutatására, közösségi irányító tevékenységére, szerkesztői munkásságára, és egy mondatban érinti szabadkőművesi tagságát is.

Levéltári kutatásaim megvilágították, hogy Beke Manó szabadkőművessége szervesen összefonódott matematikus, főleg matematikatanári voltával. A XIX. század utolsó évtizedeitől ugyanis a szabadkőművesség erősen igyekezett megnyerni haladó céljai számára a tanárokat. Egyes szabadkőműves páholyok tagdíjat sem kértek a pedagógusoktól. Tisztában voltak jelentőségükkel a felvilágosodás, a társadalmi igazságosság, az emberszeretet terjesztésében. Ezek a szabadkőművesség sarkalatos elvei.

A „Könyves Kálmán, az előítéletek legyőzéséhez" című páholy pedagógustagjai részére kötelezővé tette az új tanterv kidolgozásában való részvételt. Olyan új tankönyvek írására késztette őket, amelyek a béke szeretetére nevelnek. Ez a páholy a gyermekbarát jótékonysági intézményeket, majd a diákjóléti egyesületeket karolta fel. Később a pedagógusok gazdasági és egyéb követeléseit támogatták. A páholy tevékeny részt vállalt az utóbb radikális követelései miatt betiltott Tanítók Szabad Egyesülete megalakításában, és a nagyváradi szabadkőműves vándorgyűlés megbízásából a következő szabadkőművesi pedagógustalálkozót ők szervezték. Az Új Korszak című lap haladó irányzatú szerkesztése is a páholynak tulajdonítható. Így lett a radikális tanító- és tanármozgalmak elismert vezetője a Könyves Kálmán-páholy.

Érthető ezek után, hogy Beke Manó éppen ebbe a páholyba kérte 1890. december 9-én, 28 éves korában a felvételét. Több jó ismerőse is volt a páholyban.

Nagyon erősen megválogatták, hogy kit vesznek fel a szabadkőművesek közé. A jelentkezőket előre elkészített kérdésekkel, — ma úgy mondjuk — lapokkal vizsgálták meg. A kérdések minden esetben jelentős erkölcsi állásfoglalást igényeltek. A Könyves Kálmán-páholyban magyar és német nyelven a következő kérdések szerepeltek: „Mivel tartozik az ember Istennek?" „Mivel tartozik az ember embertársainak?" „Mivel tartozik az ember önmagának?"

Beke Manó jellegzetes, apró, formás betűkkel írt válaszai a filozofálásra hajló, hívő embert, a született kitűnő pedagógust, akitől a mai tanárok is tanulhatnak, a lelkiismeretes családapát, az emberszerető tudóst mutatják be. Így szólt:

„Csak igen nagy bajokban érezzük a közeli kapcsolatot, mely bennünket Istenhez fűz és e megrendítő kapcsolat hatása alatt jut eszünkbe, hogy minő parányi az emberi lét, az emberi erő azon végtelen hatalommal szemben, mely gon-

dunkat viseli. E hatalom iránti *hála érzet* az mely bennünket elfog."

„Embertársunkat, ha bajban van, segítenünk kell, hogy bajba ne jusson, óvnunk kell, az egyenes útra vezetni, tévedéseiről — kíméletesen — felvilágosítani, szeretni, boldoggá tenni, de mindig szelíden, saját énjében felkeresni a jót és ezt ápolni, ezt fejleszteni, de legfőkép tisztelni."

„Önmaga iránt az a tartozása, hogy magát lehetőleg tökéletesítse, boldogítsa, kötelességét pontosan maga elé írja és ezek teljesítésével magának megnyugvást szerezzen, családjába énjét belé helyezze és családjának, embertársainak boldogságából a saját boldogságát is merítse."

„Bpesten, 1890. decz. 9-én

Beke Manó"

Ezeket a szép gondolatokat Beke Manó életében is megvalósította, részben éppen szabadkőműves munkássága során. Ezért is gondolunk most tisztelettel a nagy matematikusra és iskolát teremtő tanárra, a tiszta jellemű, szerető, gondos családapára, a hazai szabadkőművesség egyik nemzetközi hírű képviselőjére.

Hatodik Nemzetközi Matematikaoktatási Kongresszus
Budapest, 1988

A Nemzetközi Matematikaoktatási Bizottság (International Commission on Mathematical Instruction=ICMI) négyévenként rendez Nemzetközi Matematikaoktatási Kongresszust (International Congress on Mathematical Education=ICME). Az ICME—6 Budapesten lesz 1988. júl. 27—aug. 3. A szervezésre a Bolyai János Matematikai Társulatot kérték fel, amely a Magyar Tudományos Akadémiával és a Művelődési Minisztériummal együttműködve látja el ezt a feladatot. Az összes főbb kérdésben a Nemzetközi Programbizottság (International Program Committee= =IPC) dönt, a megvalósítás irányítása a magyar szervezőbizottság feladata.

A kongresszus mintegy 1500—2000 külföldi és minél több magyar résztvevő aktív közreműködésére számít. A magyar matematika és matematikaoktatás nemzetközi elismerését és megbecsülését jelzi, hogy az ICME—6-ot Magyarországon rendezik, de ez egyúttal nagy felelősséget és igen komoly előkészítő munkát is jelent. A konferencia sikere nagymértékben múlik a magyar matematikaoktatók hozzáállásán és tevékenységén, és ugyanakkor az ő számukra (azaz a *mi* számunkra) jelenti a legnagyobb hasznot azáltal, hogy lehetőség nyílik igen sokfajta vélemény, tapasztalat és módszer megismerésére és cseréjére.

A szervezők igyekeznek olyan programot összeállítani, hogy abban mindenki, aki bármilyen intézményben bármilyen korosztályt matematikára tanít, találjon őt érdeklő területet, előadást, vitapartnert. Ezért plenáris előadások éppúgy lesznek, mint kis munkacsoportok, és sok lehetőség lesz kötetlen eszmecserékre és kapcsolatok kialakítására is.

A konferencia fő nyelve az angol. Néhány előadást szinkrontolmácsok több nyelvre, köztük magyarra is fordítani fognak. Hivatalos nyelv még a francia, német és orosz is. Mivel ez nem nyelvészeti vagy irodalmi konferencia, esetleges mérsékeltebb nyelvtudás sem akadálya az eredményes részvételnek.

A szakmai program fő területei:

1. Plenáris előadások (felkért előadókkal):
Andrej ERSOV (Novoszibirszk): Az új szovjet matematika tantervről,
Jean-Pierre KAHANE (Párizs), az ICMI elnöke: Pólya György munkássága,
LOVÁSZ László (Budapest): Algoritmusok, és szerepük a matematika tanításában és tanulásában,
Bienvenido NEBRES (Manila): Az iskolai matematikaoktatás az 1990-es években, illetve a harmadik világban,
Gérard VERGNAUD (Párizs): Kognitív pszichológia a matematika tanításával és tanulásával kapcsolatban.

2. Korcsoportok (Action groups): 7 párhuzamos csoportban dolgoznak 4 napon át reggel 8,30—10-ig.
A1 4—8 évesek,
A2 7—12 évesek,
A3 11—16 évesek,
A4 14—18 évesek,
A5 Felsőoktatás,
A6 Tanárképzés,
A7 Felnőttoktatás.

Matematika és számítástechnika

Évvégi összegzés

a számítástechnika matematika orientált oktatása c. kisérlet
szabad vonaláról

1986. szeptember elején indult egy kisérlet a fenti címen, OKKFT/115 számon a MüM. Közoktatási Kutatások Titkárságának menedzselésével. Az "irányított" vonalon Simonovits Miklós "Számítástechnika" című tankönyvének részleteit lehet oktatni a szerző segítségével, míg az ún. szabad változat keretein belül tetszőleges tematika követhető. A kisérlet határozottan a matematika tárgyhoz kötődik, és fő célja a számítástechnika és matematika kedvező kapcsolatainak felderítése. Az 1986-87. tanévben a következők vettek részt a szabad vonalon:

Ádámné Pittmann Katalin + 6 fő - Hunfalvy J. Közg. Szakk. Bp.
(Horváth Katalin, K.né Angyal Mária,dr.G.né Pálfy Mária, Pavek Ferencné, Szőke Imre, Túri Zoltán)
Gyene Andrásné - Petrik L. Vegyip. Szakk.Bp.
Szászné Simon Judit - Móricz Zs. Gimn. Bp.
Ámon Ottó - József Attila Gimn. Bp.
Mekis László - Békéscsaba, Kemény G. Szakk.
dr. Sárkány Ernő - Kecskemét, Katona J. Gimn.

Az alábbiakban a kisérletezők véleményét foglaljuk össze, elsősorban az általuk beküldött évvégi összefoglalók alapján; kisebb mértékben pedig az évközi óravázlatokat is figyelembe vesszük.
Az résztvevők többsége a BASIC alapelemeit tekintette számítástechnikának - ami persze nem meglepő.

CSAK MATEMATIKA ÓRA!

Lényeges megkötésünk volt, hogy a törzsanyaghoz kapcsolódva, órai keretek között kerüljön sor a kisérletre. Szakköri próbálkozás ugyanis már eddig is sok volt, ezekből számtalan tapasztalat adódott. Kis túlzással állítható, hogy a szakköri tevékenység "sinen van", minket pontosan az eltérő pontok, gondok érdekelnek: kisérletünk közege a normál tanterv, és az átlagos (nem feltétlenül érdeklődő) tanuló. Elsősorban a törzsanyaghoz való kötődést figyeljük, és inkább ezt próbáljuk bővíteni kiegészítő anyag jellegű tudnivalókkal.
A kisérlet fő aspektusa a számítástechnika és matematika kölcsönhatása. Mi az, ami a matematikán keresztül könnyen és hatékonyan megtanítható a programozás környékéről, illetve hogyan profitálhat a matematika a számítástechnikai ismeretekből?

OBJEKTÍV FELTÉTELEK

A résztvevő iskolák gépi lehetőségei igen változatosak voltak. A minimum 3 gép egy pici lukban (több gép nem is igen férne el), a csúcs pedig 22 gép három teremben. A sok gép általában az órán kívüli gyakorlást érinti, hiszen a matematika terembe alkalmanként 1 esetleg 2 gép kerül be - demonstrációs céllal. Kevés helyen volt lehetőség (idő, hely) az órák jelentős részét gépteremben tartani. Kivétel nélkül mindenki panaszkodott a tanári segédanyagok hiányára, illetve egyes könyvek horribilis árára. Ugyancsak mindenki nélkülözi a jól használható (oktató)szoftvereket. Az őrdén próbálunk valami továbbképzést csinálni, és az igények szerinti programokat gyűjteni. Az igen zsúfolt tananyag miatt nagy gond a BASIC alapismeretek beszorítása. Általában évi 270-450 (kirívó esetben 750) percet sikerült "ellopni" a matektól, ehhez (gyerekenként) 1-15 délutáni gyakorló órát lehet számítani. A legtöbb kisérletező havonta egy-két-három alkalommal 15-30 percet fordított a BASIC alapjaira. Néhányan teljes órát is áldoztak esetenként. Az alkalmanként 5-10 perces számítástechnikai "blokkokat" előbb-utóbb mindenki feladta. Kiváncsiak voltunk a szakköri munka és az otthoni környezet hatására. A gyerekeknek átlagosan 10-40%-a jut rendszeresen géphez iskolán kívül. Általánosban 10-50% találkozott már komputerrel. 0-35%-uk jár szakkörbe is. Nyilván ezek a tanulók gyorsabban, jobban haladnak. Ez sehol sem jelentett zavart (a haladóbbak nem fegyelmezetlenkedtek, nem lettek fölényesek).

ÁLTALÁNOS ÉSZREVÉTELEK

- Mindenki időzavarról panaszkodott, főleg az elején, az alapfogalmaknál. Többen jelezték, hogy mindig több időre volt szükség a tervezettnél. Erre utal az is, hogy az IF és FOR közül nem mindenütt került sorra mindkettő, pedig ez a két utasítás a legszűkebb minimumból sem hagyható ki. Nélkülük a programozás nem programozás! Általában LET, PRINT, INPUT, RUN, LIST, END, STOP, GO TO, INT szinte mindenkinél szerepelt. Sok helyütt volt RND, ABS, és FOR illetve IF.
- "A gép pontosságra nevel, leszoktat az elnézésről, a figyelmetlenség szülte 'kis' hibákról". (Például 0-val osztás, befogónál kisebb átfogó, stb okozta hibaüzenetek.)
- "A gép hatására nő a különbség a legjobbak és a leggyengébbek között." Ez meglepett egy kicsit, a jövőben kifejezetten figyelni fogjuk, és jó lenne megfordítani a tendenciát.
- Egyöntetű gond, hogy a gépek óra előtti bőüzemeléséhez kevés a szünet. Az órán kívüli (délutáni) gépidő nehezen számolható el. Sokan érzik, hogy a számítástechnikai részre sokkal többet kell készülni, mint a matematikaira. Kifejezetten reméljük, hogy az ezek az idő múlásával javulnak (gyakorlat teszi a mestert).
- "Matematika órán a teremben egyetlen gép van, aminek a képernyője igen rosszul látható. Óránként mindössze 2-4 gyerek fordul meg a billentyűzet előtt." Ezen is rengeteget segítene a bontás.
- "Nem szerencsés a matematikában szétaprózni a számítástechnikát, csak azt az érzetet kelti, hogy része annak." Egyelőre "matematikát kiszolgáló" minimális BASIC-et (ld. a végén) , algoritmizálást, problémamegoldást szeretnénk tanít(tat)ani. Reméljük, a BASIC rész időigénye elenyészőre csökkenthető, a többi viszont már "szinte matematika". A számítástechnika (tudományának) nagy része viszont szerintem is távol áll a középiskolától.
- A több mint 40 óra elemi geometriához igen kevés a kapcsolási lehetőség. Ugyanakkor a grafikaorientált oktatásban számtalan csatlakozás adódik, és ez a közelítés igen vonzó a tanulók körében! Ezt a kérdést is fokozottan figyeljük a jövőben.
- Sokak számára nehezebb volt egy kész algoritmust értelmezni, mint egy feladatot algoritmizálni.

GYÜMÖLCSÖZŐ TÉMAKÖRÖK

- Első osztályban kirobbanó a számelmélet sikere. Mindenütt szerepelt az oszthatóság, prímkeresések,LNKO (euklideszi alg. is), stb.
- Sokan említették a függvényeket, értékek kiszámítása, táblázat készítése, illetve ábrázolás formájában. Hasznosnak mondták a különböző paraméterek hatásának vizsgálatát a függvények meneténél. Olyan (magasabbfokú) függvényekről lehet beszélni, ami gép nélkül elképzelhetetlen!
- Mindenki használt gépet az egyenletek környékén, a Pitagorasz tételnél, és a négyzetgyökvonásnál. Itt is vonzóbb a géphasználat, mint a papíron való számolás, vagy a függvénytáblázat.
- Többen említették a trigonometriát, a geometriai számításokat (terület, felszín, térfogat), és a koordinátarendszert, bár ezek mélysége, gyakorisága (összideje) elmarad az előzőkétől.
- Két helyen használtak DEMO programot a geometriai transzformációkhoz, ezek egyikén algoritmizálták is az (összetettebb) transzformációkat.
- Unalmas számolást vált ki a gép a tizedes és közönséges törtek átváltásánál, illetve a különböző számrendszerek konverziójánál.
- Az elsős éveleji ismétlés (számolás) összekapcsolható a kalkulátor üzemmóddal, illetve az első utasításokkal:LET, PRINT, INPUT,stb.
- A SQR(A) közelítése rekurzióval nem lévén törzsanyag, itt még a matemetikai elmélet idejét is ki kell gazdálkodni.

SZÁMONKÉRÉS, HATÁSFOK, GYEREKEK KÖZÉRZETE

A számonkérés módja eléggé különböző. Némelyek feleltetnek, ritkán dolgozatot íratnak. Előfordul, hogy a házi feladatért jó jegyet lehet kapni, rosszat nem. Volt, ahol a számomkérés előtti délutánokon megnőtt a gépterem látogatottsága!
A tanárok eléggé ódzkodtak a "feleltetéstől", pedig ez az egyetlen visszajelzés a passzívabb gyerekek felől. Az idei évtől már megkívánjuk, hogy a kisérletezők pontosan ismerjék az osztály tudásszintjét.
A jó hatásfok legfőbb akadálya a gép,- és még inkább az időhiány. Az osztályban egy gép csak demonstrációra alkalmas, tehát a gyakoroltatás délutánra, otthonra marad(na). Szinte mindenki álmodozik a bontott osztályról - páran (részben) meg is csinálták. Aggasztóan sok idő (40-250 perc) elmegy a gép kezelésének gyakoroltatására (bekapcsolás, billentyűzet, stb), vajon miért nem oldja meg ezt más tárgy - például a technika - kérdezték többen is. Jó hatással van az írógépen való gyakoroltatás, ez esetleg még otthoni feladatra is kiterjedhet.
A tanulók többsége kedveli a komputer matematika órai jelenlétét, érdekli is őket a dolog. Kis részük nyűgnek érzi, plusz tehernek. Meglepő észrevétel, hogy matekban amúgy jó gyerekek idegenkedtek: zavarta őket a sok kudarc, amit valószínűleg a kevés gépidő okozott. Ugyanakkor örömmel olvastam, hogy "többeknél segített megkedveltetni a matekot". Ez lenne ugyanis a kisérlet egyik (szerintem legfontosabb) célja. Keresni fogunk vonzó, érdeklődést felkeltő problémákat, illetve érdekes (játékos) megoldásokat.

A TANÁROK KÖZÉRZETE

Azt hiszem általában boldogan csinálták, jóllehet ezt csak ketten írták le. Már említettem, és nem lehet elégszer leszögezni, hogy komoly teher a kisérletezőknek; ezt szeretnénk enyhíteni, és reméljük, az idő is nekik dolgozik.

Többen kételkednek a matematika és a számítástechnika pozitív kölcsönhatásában középiskolás szinten . Mi határozottan bízunk ebben. Persze az is biztos, hogy csak idővel, az ötletek, módszerek finomítása után várható egyértelmű eredmény. Meggyőződésünk, hogy az "ellopott" percek kamatostúl megtérülnek magasabbszintű és hatékonyabb matematika oktatás formájában.

TOVÁBBI TAPASZTALATOK

Elsőben nem szerencsés "alapozásra" fordítani a kevés időt. A célnak megfelelő pár soros programok összejönnek a perifériák ismerete nélkül, sőt a kettes számrendszerre, vagy a blokkdiagramra sincs (eleinte) szükség. Ezekre később is vissza lehet térni, illetve más tárgyak segítségében is reménykedhetünk.
Okvetlenül fontos viszont (lehetőleg már első félévben) a PRINT, =(LET),INPUT, RUN, LIST, FOR-NEXT, IF-THEN-ELSE, és az alapfüggvények. Vonzónak tűnik néhány grafikus és hangkeltő utasítás. Kevésbé lényeges például az END, AUTO, DELETE, REM, POKE, READ-DATA, stb. Utóbbiakat elég esetleg megmutatni, aktív ismeretük eleinte elengedhető. Gondoljunk arra, hogy évi 10-20 órai használat kedvéért kár 40-50-70 szót megtanítani. Ugyanakkor például az IF-THEN megfelelő elsajátításához 5-6-szori ismétlés sem sok!
Előzőkkel függ össze, hogy meg kell különböztetni aktív és passzív tudást! Természetesen nem várható el egy gyengébbnek tartott tanulótól, hogy ugyanazt a programot kirázza, mint eminens társa. De ő is ismerje fel a szóbanforgó lista főbb funkcióit, tudjon rajta esetleg módosítani. Nem kell, hogy tökéletes kiejtéssel soroljék, illetve pontosan fordítsák a hibaüzeneteket, de egy esetleg megjelenő üzenet okáról legyen elképzelésük. Gyengébbeknek hálás feladat lehet, hogy keressenek (egyszerűbb) hibát egy rövid listában, vagy mondják meg, mit csinál a program?

Nagyjából ennyit sikerült leszűrnöm az első évből. Igyekeztem a saját véleményemet háttérbe szorítani, inkább a kisérletezők érzéseit fogalmaztam meg. Annak örülnénk, ha az ennek nyomán érkező észrevételekből egy eszmecsere bontakozna ki erről a renkívül mostohán kezelt, de a matematika szempontjából sem lényegtelen kérdésről. Várjuk tehát a kollégák hozzászólásait, és reméljük, hogy az itt kapott publikációs lehetőséggel sokak megelégedésére tudunk élni. Azért is várjuk az észrevételeket, mert szeretnénk a résztvevők körét bővíteni, illetve a kisérlet hatását (visszhangját) minél több iskolára kiterjeszteni.
A közeljövőben dr. Sárkány Ernő (Kecskemét) saját koncepcióját ismertetné, mely teljesen eltér a többiekétől, és mindenképpen figyelemreméltónak tartjuk. Ugyancsak hamarosan néhány tanterv változat jelenik meg a folyóirat belsejében Simonovits Miklós tollából. A továbbiakat egyrészt a kisérlet alakulása, másrészt a hozzászólók érdeklődése befolyásolná.

Török Turul
MTA KFKI 1525. Pf. 49.

3. Témacsoportok (Theme groups): 7 párhuzamos csoportban dolgoznak 4 napon át délután 14—15,30-ig.
T1 Tanári hivatás.
T2 Számítógépek és a matematika tanítása.
T3 Problémamegoldás, modellkészítés, alkalmazások.
T4 Értékelés és felmérés.
T5 A tanítás gyakorlata és didaktikai kutatások.
T6 Matematika és más tárgyak.
T7 Tananyag 2000 körül.

4—5. Tárgykörök (Topic areas) és Nemzetközi kutatócsoportok (International study groups): ezek általában azonos tárgykörbe tartozó előadásokat fűznek össze, illetve dolgoznak fel. A rendelkezésükre bocsátott idő eltérő nagyságú. Sem a „Korcsoportokkal", sem a „Témacsoportokkal" nem ütköznek, de egymással ütközhetnek.
To 1 Video, film.
To 2 Szemléltetés.
To 3 Versenyek.
To 4 Hátrányos helyzetű tanulók.
To 5 Nemzetközi összehasonlítás.
To 6 Valószínűségszámítás és statisztika.
To 7 Bizonyítás, igazolás és meggyőzés.
To 8 Nyelv és matematika.
To 10 Tehetséggondozás.
To 11 Matematikai játékok.
To 13 Nők és matematika (az IOWME=International Organization for Women in Mathematical Education kutatócsoport programja).
To 15 A matematikaoktatás elmélete.
To 16 Terek és geometriák.
To 17 Információ és dokumentáció.
To 18 Szisztematikus együttműködés a matematikaoktatás elmélete és gyakorlata között.
HPM (=History and Pedagogy of Mathematics) kutatócsoport: A matematika története és pedagógiája.
PME (=Psychology of Mathematics Education) kutatócsoport: A matematikaoktatás pszichológiája.
Az eredetileg még javasolt To 9, To 12 és To 14 az IPC javaslatára más csoportokba olvadt be.

6. Áttekintő előadások: a kor- és témacsoportok szerinti osztályozásban, de azoktól függetlenül, összefoglaló ismertetést adnak a terület főbb irányzatairól és problémáiról.

7. Nemzeti bemutatkozások: Az IPC felkérésére Argentína, Bulgária, Malawi és Spanyolország képviselői ismertetik országuk iskolarendszerét, és ezen belül a matematikaoktatás helyzetét.

8. Ötödik nap: Matematika, Oktatás és Társadalom (MES=Mathematics, Education and Society). A program sokoldalúan elemzi a matematikaoktatás és a társadalom bonyolult és növekvő problémáktól terhes kapcsolatát.

9—10. Egyéni előadások és poszterek.

11. Projektek (nagyobb kutatási feladatok és tevékenységek rövid bemutatása).
A különböző munkacsoportok lényegében önállóan alakítják ki programjukat. Ezek részletesebb ismertetését a csoportok főszervezőinek és magyar koordinátorainak címével együtt a kongresszus (angol nyelvű) második tájékoztatója tartalmazza, amely megtekinthető a Bolyai Társulat központjában (Budapest VI., Anker köz 1—3.) és megyei tagozatainál. A második tájékoztató magában foglalja a kongresszussal kapcsolatos egyéb tudnivalókat is, ezek főképp a külföldi résztvevőket érintik. A magyar kollégákra vonatkozó teendőkről a Társulat tagjaihoz 1987 őszén körlevelet juttat el és ehhez jelentkezési lapot is csatol. Az ICME—6-tal kapcsolatos bármilyen kérdésben készséggel nyújt felvilágosítást a Társulat központja, postacím: Bolyai János Matematikai Társulat, ICME—6, Budapest, Pf. 240. 1368, telefon 427-741.
A szervezőbizottság a kongresszussal kapcsolatban örömmel fogadja mindenki jelentkezését, javaslatait, észrevételeit, (munka-)felajánlásait és közreműködését.
A szervezők nevében

Császár Ákos	Szendrei János	Nemetz Tibor
az IPC elnöke	a szervezőbizottság elnöke	a szervezőbizottság titkára

Új könyvek
I.

BARTHA GÁBOR—KUN PÉTER: *Válogatott fejezetek a matematikából*, Középiskolai szakköri füzetek, Budapest, 1986.,Tankönyvkiadó, 250 oldal, 38 Ft.

BOLLA MARIANNA: *Mátrixok spektrálfelbontásának és szinguláris felbontásának módszerei*, Budapest, 1985., SZTAKI, 118 oldal, ár nélkül.

COXETER, H. S. M.: *Projektív geometria*, Budapest, 1986., Gondolat Könyvkiadó, 179 oldal, 65 Ft.

CSISZÁR IMRE and KÖRNER JÁNOS: *Information theory, Coding theorems for discrete memoryless systems*, Budapest, 1986., Akadémiai Kiadó, 452 oldal, 420 Ft.

CZAPÁRI ENDRE: *Tanári kézikönyv a szakközépiskolák I. és II. osztályos matematika tananyagának tanításához* (2. kiadás), Budapest, 1986., Tankönykiadó, 254 oldal, 35 Ft.

DEÁK ERVIN: *Tanári kézikönyv a Matematika I. kiegész,tő tanűönyvhöz a műszaki szakközépiskolák részére*, Budapest, 1986., Országos Pedagógiai Intézet, 124 oldal, ár nélkül.

FEKETE ISTVÁN: *Matematika és számítástechnika*, Budapest, 1986., Műszaki Könyvkiadó, 205 oldal+23 oldal melléklet, 66 Ft.

FRIED KATALIN—POGÁTS FERENC: *Középiskolai matematikai versenyek 1980—1984*, Budapest, 1986., Tankönyvkiadó, 481 oldal, 65 Ft.

GÁDOR ENDRÉNÉ—GYAPJAS FERENCNÉ—HÁRSPATAKINÉ DÉKÁNY VERÁDIKA—KORÁNYI ERZSÉBET—PÁLMAY LÓRÁNT—POGÁTS FERENC—REIMAN STVÁN—SCHARNITZKY VIKTOR: *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából* (3. kiadás), Budapest, 1986., Tankönyvkiadó, 478 oldal, 58 Ft.

IMRECZE ZOLTÁNNÉ—REIMAN ISTVÁN—URBÁN JÁNOS: *Fejtörő feladatok felsősöknek*, Általános iskolai tanulók számára, Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1986., Tankönyvkiadó, 312 oldal, 42 Ft.

KIRILLOV, A. A. (editor): *Representations of Lie groups and Lie algebras*, Budapest, 1986., Akadémiai Kiadó, 225 oldal, 280 Ft.

KÓSA ANDRÁS—MEZEI ISTVÁN—S. GYARMATI ERZSÉBET: *Analízis példatár*, Budapest, 1986., Műszaki Könyvkiadó, 415 oldal, 156 Ft.

KOVÁCS CSONGORNÉ (szerk.:) *Kézikönyv a matematika 7. osztályos anyagának tanításáho* (2. kiadás), Budapest, 1986., Tankönyvkiadó, 436 oldal, 58 Ft.

LOVÁSZ LÁSZLÓ and PLUMMER MICHAEL D.: *Mathing theory*, Budapest—Amsterdam, 1986., North Holland Publ. Co. and Akadémiai Kiadó, 544 oldal, 680 Ft.

MÁRKUS LÁSZLÓ: *Algoritmus mátrix alapú logaritmus kiszámítására kriptográfiai alkalmazásokkal*, Budapest, 1986., SZTAKI, 96 oldal, ár nélkül.

MEGYERI JENŐ: *Vasúti mozgásgeometria*, Budapest, 1986., Műszaki Könyvkiadó, 380 oldal, 118 Ft.

REIMAN ISTVÁN: *A geometria és határterületei*, Budapest, 1986., Gondolat Könyvkiadó, 418 oldal, 90 Ft.

SHANNON, CLAUDE E.—WARREN, WEAVER: *A kommunikáció matematikai elmélete*, Budapest, 1986., Országos Műszaki Információs Központ és Könyvtár, 183 oldal, 75 Ft.

SZIDAROVSZKI FERENC—MOLNÁR SÁNDOR: *Játékelmélet műszaki alkalmazásokkal, többcélú programozás, klasszikus és differenciajátékok*, Budapest, 1986., Műszaki Könyvkiadó, 239 oldal, 75 Ft.

SZLÁVI PÉTER—ZSAKÓ LÁSZLÓ: *Módszeres programozás*, Budapest, 1986., Műszaki Könyvkiadó, 116 oldal, 50 Ft.

II.

DENKINGER GÉZA: *Valószínűségszámítási gyakorlatok* (3. kiadás), Budapest, 1986., Tankönyvkiadó, 340. oldal, 45 Ft.

HAJNAL IMRE: *Beke Manó tanári munkássága*. Budapest, 1986., Bolyai János Matematika Társulat, 13 oldal, ár nélkül.

HARDY RÓBERT: *Geometriai játékok*. Budapest, 1986., Műszaki Könyvkiadó, 112 oldal, 90 Ft.

KÁNTOR SÁNDORNÉ: *Matematikát, fizikát oktató tudós és nevezetes tanárok Hajdú, Szabolcs és Szolnok megye középiskoláiban, 1850—1948*. Debrecen, Kossuth Lajos Tudományegyetem 1986., 473 oldal, ár nélkül.

KOVÁCS JÓZSEF—TAKÁCS GÁBOR—TAKÁCS MIKLÓS: *Analízis*. Főiskolai tankönyv Budapest, 1986., Tankönyvkiadó, 471 oldal, 45 Ft.

MATOLCSI TAMÁS: *A concept of Mathematical Physisc, Models in Mechanics.* Budapest, 1986., Akadémiai Kiadó, 335 oldal, 420 Ft.

MAYERNÉ BARTEL ANDREA—PÁLFALVI JÓZSEFNÉ: *Tankönyvi útmutató a III. osztályos matematika munkakönyvéhez. Gimnázium.* (2. kiadás), Budapest, 1986., 91 oldal, 15 Ft.

MÓRI F. TAMÁS—SZÉKELY GÁBOR: *Többváltozós statisztikai analízis.* Budapest, 1986., Műszaki Könyvkiadó, 393 oldal, 97 Ft.

NÉMETH JÓZSEF—VARGA ANTAL: *Az integrálról.* Középiskolai szakköri füzet. Budapest 1986., Tankönyvkiadó, 261 oldal, 31 Ft.

PRÉKOPA, ANDRÁS (editor): *Studies in Applied Stochastic Programming* (utánnyomás). Budapest 1985., SZTAKI, 209 oldal, ár nélkül.

SAIN MÁRTON: *Nincs királyi út* Budapest, 1986., Gondolat Könyvkiadó, 831 oldal, 195 Ft

TÓTH LÁSZLÓ (szerk.): *A differenciált foglalkoztatás lehetőségei a 7 osztályos matematika tantárgy tanításában* Módszertani segédanyag, Győr, 1985., Megyei Pedagógiai Intézet, 88 oldal, ár nélkül

Útmutató a kisegítőiskola 6. osztályának tankönyveihez, 2 Matematika, ének-zene, természeti ismeretek, technika. Budapest, 1986., Tankönyvkiadó, 232 oldal, 45 Ft.

III.

BÁNKÖVI, GY.—VELICZKY, J.—ZIERMANN, M.: *Dynamic factor analysis,* Budapest, 1986, K. Marx Univ. of Economics, 81 oldal, ár nélkül.

BORSODI ISTVÁN—GÖNDÖCS LÁSZLÓ: *Matematika a tanítóképző intézet első évfolyama számára.* Ideiglenes tankönyv (11. kiadás). Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 355 oldal, 33 Ft.

BOZSAKI GÉZA: *Kirándulás a számítógépek szigetére* (Utazások Matematikaországban). Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 96 oldal, 35 Ft.

CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER—R. SZENDREI JULIANNA—TÖRÖK JUDIT: *Útmutató a Kis Matematikusok Baráti Köre 3. és 4. évfolyamának vezetői részére* (utánnyomás.) Budapest, 1986, Tudományos Ismeretterjesztő Társulat, 80 oldal, 25 Ft.

CIMEV, K. N.: *Separable sets of arguments of functions.* Budapest, 1986, SZTAKI, 173 ldal, ár nélkül.

DARÓCZY ERZSÉBET: *Útmutató a matematikai feladatlapok felhasználásához óvónők számára.* Budapest, 1986, Minerva Könyvkiadó, 41 oldal, 11 Ft.

DEÁK ISTVÁN: *Véletlenszám-generátorok és alkalmazásuk.* (Az operációkutatás matematikai módszerei, 3.). Budapest, 1986. Akadémiai Kiadó, 235 oldal, 96 Ft.

ERDÉLYI ZOLTÁN: *Stepping stone módszerek 1, 2,* (Matematikai és számítástechnikai füzetek). Miskolc, 1986, Nehézipari Műszaki Egyetem, 108+104 oldal, ár nélkül.

GNÄDIG PÉTER—JÁNOSSY LAJOS—TASNÁDI PÉTER: *Vektorok integrálása,* Egyetemi tankönyv (2. kiadás). Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 398 oldal, 45 Ft.

JEGOROV, I. P.: *Geometria,* Egyetemi segédkönyv. Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 320 oldal, 43 Ft.

KALMÁR LÁSZLÓ: *Integrállevél, Matematikai írások.* (Válogatta, szerkesztette, az előszót és a bevezetést írta Varga Antal.) Budapest, 1986, Gondolat, 276 oldal, 45 Ft.

MANYIN, JU. I.: *Bevezetés a kiszámíthatóság matematikai elméletébe,* Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 144 oldal, 40 Ft.

MAYERNÉ BARTAL ANDREA—PÁLFALVI JÓZSEFNÉ: *Tankönyvi útmutató az I. osztályos matematika munkatankönyvhöz: Gimnázium* (2. kiadás). Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 91 oldal, 15 Ft.

MAYERNÉ BARTAL ANDREA—PÁLFALVI JÓZSEFNÉ: *Tankönyvi útmutató a II. osztályos matematika munkatankönyvhöz: Gimnázium* (2. kiadás). Budapest, 1986. Tankönyvkiadó, 64 oldal, 11 Ft.

MESZÉNA GYÖRGY (szerk.): *Sztochasztikus módszerek a döntéselőkészítésben, Modellek, esettanulmányok.* Egyetemi segédkönyv (2. kiadás). Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 252 oldal, 29 Ft.

MÉRŐ LÁSZLÓ (összeállította): *Matematika tanmenet-javaslatok, 1—4. osztály.* Budapest, 1986, Ifjúsági Lapkiadó, 60 oldal, 25 Ft.

MISER, HUGH J.—QUADE, EDWARD S. (szerk.): *A rendszerelemzés kézikönyve. A felhasználás, az eljárás, az alkalmazások és a gyakorlat áttekintése.* Budapest, 1986, Országos Műszaki Fejlesztési Bizottság, Statisztikai Kiadó, 400 oldal 198 Ft.

PREUSS WOLFGANG—BLEYER ANDRÁS—PREUSS HEINRICH: *Disztribúcióelmélet műszaki alkalmazásokkal.* Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 282 oldal, 77 Ft.

RÉVÉSZ, P.—SARKADI, K.—SEN, P. K. (editors): *Goodness-of-fit.* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 45. Budapest—Amsterdam—Oxford—New York, 1987, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publ. Co., 624 oldal, 600 Ft.

SZABADOS, J.—TANDORI, K. (editors): *Alfred Haar Memorial Conference, I—II.*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 49. Budapest—Amsterdam—Oxford—New York, 1987, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publ. Co., 474 + 544 oldal, 1060 Ft.

SZENDREI JÁNOS: *Algebra és számelmélet.* Tanárképző főiskolai tankönyvek (3. kiadás). Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 475 oldal, 51 Ft.

SZÉKELY, J. GÁBOR: *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics.* Budapest, 1986, Akadémiai Kiadó, 250 oldal, 300 Ft.

SZŐKEFALVI-NAGY, B.—HATVANI, L. (editors): *Differential equations; qualitative theory, I—II.* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 47. Budapest—Amsterdam—Oxford—New York, 1987, János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publ. Co., 1172 oldal, 1200 Ft.

SZTRÓKAYNÉ FÖLDVÁRI VERA (szerk.): *Kézikönyv a matematika 8. osztályos anyagának tanításához* (2. kiadás). Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 467 oldal, 62 Ft.

TUSNÁDY GÁBOR—ZIERMANN MARGIT (szerk.): *Idősorok analízise.* Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 341 oldal, 118 Ft.

VILENKIN, N. J.: *Kombinatorika* (2. kiadás). Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 358 oldal, 76 Ft.

Dr. Scharnitzky Viktor

Andrásfai Béla:

Versenymatek gyerekeknek

Általános és középiskolai tanulók számára

„E feladattár az átlagosnál nagyobb érdeklődésű általános iskolások számára készült. Előismeretként nem igényel többet a 3—4. osztályok matematika tananyagánál. A feladatok egy része e tananyag elmélyítésére szolgál, nagyobb hányada azonban komolyabb fejtörést igényel. Ajánljuk elmesportra és szellemi szórakozásra vágyó 3—6. osztályosoknak, de a feladatok jó részével 7—8. osztályosok, sőt I—II. osztályos középiskolások is csiszolhatják elméjüket. A könyv tartalmazza a feladatok megoldását, a feladatok többségéhez pedig segítő utasítás, ill. ötlet is található."
(R.sz. 19 033.)

Németh József—Varga Antal:

Az integrálról

Középiskolai szakköri füzet

„A szerzők az integrál fogalmát — a középiskolai tananyaghoz képest — bővebben tárgyalják, a Riemann-integrál mellett megismertetnek a Lebesgue-integrállal is. Ezt úgy teszik, hogy közben halmazelméleti kiegészítést, megalapozást adnak, bevezetnek a matematika egyik modern ágába, a mértékelméletbe.

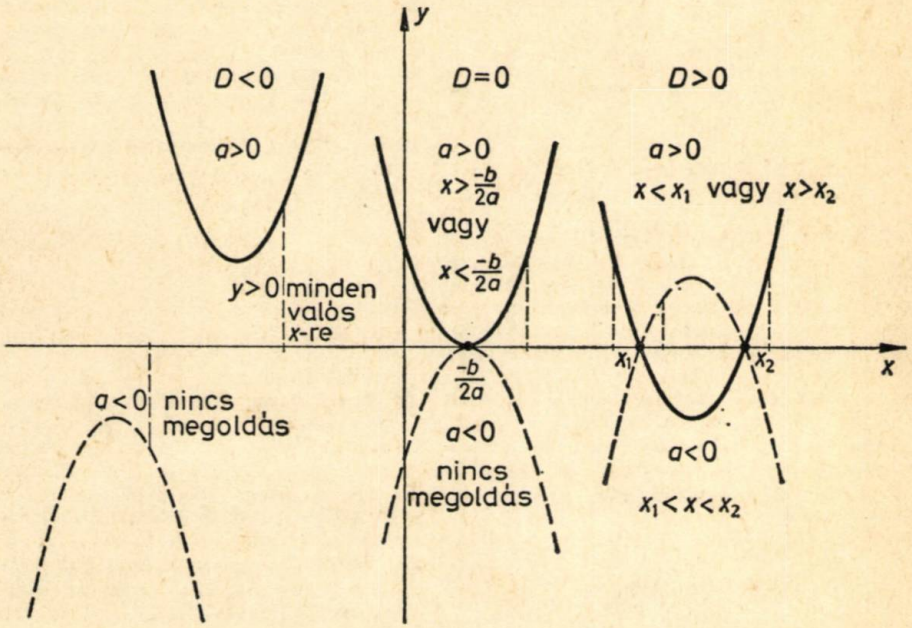
A könyvet különösképpen olyan, matematika iránt érdeklődő középiskolásoknak ajánljuk, akik már előzetesen megismerkedtek az analízis elemeivel."
(R.sz. 29 262.)

Ára: 7,— Ft

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata

VERSENY KÖNYVTÁR SZOLNOK



$y=ax^2+bx+c>0 \quad (a\neq 0)$ megoldása

1987. XXXIV. évfolyam 5 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE
SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

87-3443 — Szegedi Nyomda
F. v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban, példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
a) személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését, (nyugdíjasok törzsszámukat,) *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal.

TARTALOM

Dr. Papp Sándor: Kipróbáltunk egy matematikai készségfejlesztő számítógépprogramot 129
Dr. Molnár József: A matematikai gondolkodás fejlesztésének lehetőségei 132
Dr. Hajnal Imre: A gimnáziumok I. osztálya számára megjelenő új tankönyvről..... 136
Mihalovics Sándor: Ptolemaiosz tételéhez kapcsolódó megjegyzések 139
Baboss Csaba: Kúpszeletek adott pontra illeszkedő érintőinek egyenletei 144
Fialáné Dér Zsuzsa—Lukács Ottó: Egyenlőtlenségek számítógépes megoldásának tanítása. Bevezetés 147
Bencze Mihály: Egyenlőtlenségek a háromszögben 152

СОДЕРЖАНИЕ

Д-р Папп Шандор: Испытана программа на ЭВМ для развития способностей к математике 129
Д-р Молнар Йожеф: Возможности развития математического мышления... 132
Д-р Хайнал Имре: О новом учебнике математики для I-го класса гимназии 136
Михалович Шандор: Заметки к теореме Птолемая 139
Бабоши Чаба: Уравнения касательных, приложенных к данной точке кохнческих сечений 144
Фиалане Дер Жужа—Лукач Отто: Преподавание решения неравенств при помощи ЭВМ 147
Бенце Михай: Неравенства в треугольнике 152

INHALT

Dr. Papp, Sándor: Wir haben ein Computer-Programm ausprobiert, das zur Entwicklung mathematischer Fertigkeiten dient 129
Dr. Molnár, József: Die Möglichkeiten der Entwicklung des mathematischen Denkens 132
Dr. Hajnal, Imre: Über das neue Mathematik-Lehrbuch für die I. Klasse der Gymnasien 136
Mihalovics, Sándor: Bemerkungen zum *Lehrsatz des Ptolemäus* 139
Baboss, Csaba: Die Gleichungen der Tangenten von Kegelschnitten, wobei die Tangenten sich einem gegebenen Punkt anpassen 144
Frau Zsuzsa Fiala (geb.: *Dér*)—*Lukács, Ottó:* Der Unterricht der Lösung von Ungleichungen mit der Anwendung eines Computers 147
Bencze, Mihály: Ungleichungen im Dreieck 152

DR. PAPP SÁNDOR
intézeti munkatárs
Országos Pedagógiai Intézet, Budapest

Kipróbáltunk egy matematikai készségfejlesztő számítógép-programot

A NOVOTRADE RT kereskedelmi hálózatában nemrég jelent meg a „Kis professzor" elnevezésű oktatóprogram, mely C—16 és Cplus4 gépekre készült (újabban C—64-es változata is létezik). Kazettán kapható, ára 300 Ft.

A program készítői *Scharek János* és *Kertész Béla* villamosmérnökök.

Az Országos Pedagógiai Intézetben megismerkedtünk a program működésével, szolgáltatásaival és a pedagógiai felhasználás lehetőségeivel. Jelen cikkben a tapasztalatainkat szeretnénk az általános iskolai matematikaszakos kollégák számára közreadni.

A program nem az általános iskolai matematika-tananyag megjelenítésére, lefedésére készült, hanem annak egyik fontos részfeladatát: a számolási készséget emeli ki és erősíti. Így pl. nem vállalkozik a műveletek értelmezésére, csak a szám-szám kapcsolatok rögzítésére. Mivel az érvényes tananyaghoz nem kapcsolódik szervesen, ezért a tanításnak csak bizonyos mozzanatában használható, nevezetesen amikor a számolási készség fejlesztése és ellenőrzése a kiemelt feladat.

A program leginkább ajánlható felhasználási módja a tanítási órán és az órán kívüli kiscsoportos foglalkozásban, valamint megfelelő számítógéppel rendelkező családoknál az otthoni egyéni gyakorlásban jelölhető meg.

A program négy tudásszinten (fokozatban) használható:
— az 1. fokozat a 10-es számkör,
— a 2. fokozat a 20-as számkör,
— a 3. fokozat a 100-as számkör, és végül
— a 4. fokozat az 1000-es számkör.

Az összeadás, kivonás, szorzás, osztás elemi alapműveletek mind a négy fokozatban, a hatványozás és a gyökvonás pedig a 3. és a 4. fokozatban gyakorolhatók. A gyökvonás az általános iskolában mint hiányos hatványozási feladat fogható fel. A program minden fokozatban, minden műveletre 10—10 feladatot ad. Az alapműveletek végigvitele az egyes nehézségi fokozatokban mechanikus, de szerencsére az előírt sorrend megváltoztatható, illetve a nemkívánt művelet ugrással kihagyható.

A program iskolai tananyaghoz való illesztését gátolja a feladatok egyféle, rögzített formalizmusa, amely a „nyitott mondat" típusú feladatok gyakorlását kizárja. Hasonlóképpen hiányzik a törtekkel való számolás. Ezek a hiányok csak a program terjedelmének jelentős növelése árán lennének pótolhatók, amelynek valószínűleg a memóriaméret a legfőbb akadálya. (A program eredetileg C—16-ra készült, annak a memórialehetőségei szabtak határt. Talán a C plus 4 gépre készülhetne olyan programváltozat, amely a hiányzó, és az általános iskolai matematikában jelentős súllyal szereplő nyitott mondatos és törtes feladatok gyakorlására is alkalmas, bár feltételezhető, hogy gazdaságosabb ezen feladatokra olyan külön programokat kidolgozni, amelyek szintén elférnek a C—16-ban is.)

A program a tanuló motiválásában

többféle ingert is felhasznál. Vizuális megjelenése kellemes, ötletes. A jelképes kréta és szivacs használata bizonyos ritmust, mozdulati gesztikulációt ad, amely figyelemfelhívó, tekintetet irányító és segít leküzdeni a tanulói szubjektum és a gép között feszülő távolságot.

A tábla bal felső sarkában a versenyző neve olvasható, mely egyrészt személyes jelleget ad, másrészt a tanár bármikor ellenőrizheti a személyazonosságot. A név leírásához a magyar ékezetes magánhangzók is használhatók.

A hangeffektusok az adott helyzethez illőek, szintén hozzájárulnak a gépi háttér eltakarásához és a barátságos légkörhöz. Késedelmes válaszadás esetén finoman erősödő hang figyelmezteti a tanulót az idő múlására. Hibás eredmény megadása után vijjogó hang hallható, egy ragadozó madár csap le az első hibás számjegyre és magával viszi azt. Ilyenkor az etetésre szánt (eredetileg 10 db) gombócból eltűnik egy, és a program szemléletesen megmutatja, hányat vett már el és mennyi maradt még. Ha minden, etetésre szánt gombóc elfogyott, akkor vége a játéknak, a program értékeli a játékos munkáját és eredményt hirdet. A korábbi játékosok eredményeit is számításba veszi és újra megállapítja a sorrendet. Ezeket a géphez kapcsolt floppyegységen már korábban egy kijelölt lemezre rögzítette egy „KIS PROF. PONTOK" nevű programfájlba, ezt olvassa be minden új értékeléskor. A programfájl nem minden versenyző, hanem szintenként csak az eddigi hat legjobb versenyző nevét és eredményét tartalmazza, az olimpiai versenyekhez hasonlóan. Négy szinten 4×6 versenyző adatai tárolhatók így. A program az aktuális és a korábbi játszmák összesített eredménye alapján az első hat helyezett nevét és pontszámát jeleníti meg az eredményjelző táblán, és a fájl-t is felülírja, ha a sorrend az előző felíráshoz képest változott. Ha az aktuális versenyző a győztes, akkor köszöntésére egy ünnepélyes dallam hangzik fel.

A feladatok megoldása során a működési sorrend megváltoztatása a következő billentyűk megnyomásával kérhető:

— V (vége) hatására a tanuló több feladatot nem kap,
— S (szünet) hatására megjelenik az óra, a tanuló pihenhet, vagy pontlevonás nélkül eltávozhat egy időre a géptől,
— U (ugrás) hatására az adott művelet gyakorlása végetér, a tanuló a következő feladatot már az újabb művelettel kapja.

A V, S és U leütésekor az éppen esedékes feladatot még meg kell oldani, a gép a kért szolgáltatást csak ezután hajtja végre. S (szünet) után a verseny a normál sorrendben folytatható, V és U után azonban az előző működési sorrend már nem állítható vissza.

Ha a tanuló az adott feladatra nem kíván választ adni, a HELP (segíts!) gomb megnyomásával egyszerűen „passzolhat" ilyenkor a gép megadja a helyes eredményt büntetés nélkül, de a tanuló nem kap pontot erre a feladatra, csökken az elérhető maximális pontszáma.

A program hajlandó súgni is, ez a betűköz billentyű megnyomásával kérhető. Egyjegyű eredménynél háromszor kérhető súgás, többjegyűnél minden kért számjegy külön súgásnak számít. Ha minden súgási lehetőség kimerül, akkor az újabb kérést a program figyelmen kívül hagyja. A tanuló hamar rájön, hogy a súgás az elérhető pontszámot igen hátrányosan érinti: az elért eredmény (visszamenőleg és előre is!) súgásonként kb. 10%-kal csökken, három súgással elveszíti a pontszám egyharmadát. Előnyösebb passzolni, méginkább dolgozni! A jó program tehát morálisan is motiválja a tanulót: a becsületességet nem bünteti, ha az a pillanatnyi döntésképtelenségben és segítségkérésben mutatkozik meg, de leginkább a pozitív és gyors döntést támogatja.

Értékelésnél a válaszadás gyorsasága is számít: a késedelmes válaszadás csökkenti a pontszámot. A program feladatonként 100 pontot megelőlegez,

amelyből a várakozás ideje alatt másodpercenként 1 pontot levon, így 100 mp alatt minden, a feladatra kapott „előleg" pont elfogy. Ezzel egy lehetőség kimaradt a pontszerzésből, csökken a még elérhető maximális pontszám és újabb feladat következik. Helyes megoldás esetén viszont egyik műveletről a másikra áttérve jutalompontokat kap a versenyző, ezért a végeredmény kiszámításánál ezek is számításba jönnek. Például az 1. fokozat 10. feladata még összeadás, amelynek megjelenésekor a pontszám végig hibátlan számolásnál 1000 pont (a megelőlegzett 100 ponttal). Ha a dolog logikáját következetesen továbbvisszük, akkor a 11. feladatnál a pontszámnak 1100-ra kellene ugrania. A valóságban a kivonás 1500 pontról indul, tehát a versenyző az előző művelet végigviteléért 400 jutalompontot kapott. Ugyanez még kétszer (20—21., 30—31.) lejátszódik, majd a végső értékelésnél hibátlan játék esetén a pontszám 5200-ról 7600 fölé nő, a válaszadási időktől függően. A tapasztalat azt mutatja, hogy a hibátlan játék és gyors válaszok esetén elérhető maximális pontszámok az 1—2. fokozatban: *7616* pont, a 3—4. fokozatban pedig: *11 424* pont. Ebből egyenesen adódik, hogy hibátlan és gyors megoldásonként az elérhető pontszám a végső értékelésnél 190,4 pont. Ezt megerősíteni látszik az a megfigyelés is, hogy a programbehívás (vagy újraindulás) utáni *demonstrációs példamegoldása* során a véletlenszerűen felvett és megoldott feladatra helyes megoldás esetén a gép önmagának 190 pontot ad. (A saját válasz generálása némi késedelemmel történik, ezért levon 0,4 pontot.)

Az eredmény értékelésénél hiányosságnak tűnhet, hogy a program akkor is ad több, mint 100 pontot, ha a tanuló tulajdonképpen semmit sem talált el, csak vakon és eredménytelenül kísérletezett. De ha figyelembe vesszük, hogy egy helyes megoldásra az elszámolásnál 190,4 pontot ad a program, és az elérhető pontszám 7600, illetve 11 000 fölött van, akkor ez a 100—150 pont már nem jelent valami bőkezű adakozást, hanem csak csekély bíztatást a próbálkozásért.

A program barátságossága egyébként kitűnő, ugyanezt elmondhatjuk a hibás kezelés elleni védelemről is.

A következőkben a program betöltésével kapcsolatos néhány hasznos tapasztalatunkat szeretnénk közreadni.

A program működtetéséhez alapgép + + Datassette + TV szükséges, ez utóbbi lehet fekete-fehér is, de színesben tetszetősebb a kép. A program nagyrészt gépi kódú, automatikusan indul és leállíthatatlan. A Turbo-val rögzített program (beolvasási idő kb. 1 perc) írássűrűsége nagy, a felvevő-lejátszó fej beállítási pontosságára kényes, a jel könnyen „elkenődik", beolvashatatlanná válik. A Datassette fejbeállítására az eredeti gyári kazetták beolvasásánál ügyelni kell, bizonyos készülékeknél esetleg utánállítás szükséges. Ha valaki ugyanis a megvásárolt kazettáról a programot nem tudja beolvasni, akkor többnyire nem a felvétel rossz, hanem a saját Datassette fejbeállítása pontatlan, amit normál írássűrűségű (BASIC) felvételeknél nem veszünk észre. A kereskedelmi forgalomban kapható kazetták szabványos fejbeállítással készülnek, ezért az azokhoz beállított Datassette-eknek minden szabványos kazettát továbbra is hibátlanul olvasniuk kell, beleértve a saját rögzítésű BASIC felvételeket is, melyek olvasásához ilyen beállítási pontosság nem szükséges.

Végezetül néhány tanulságra szeretnénk utalni, melyek a program működésének elemzéséből adódtak.

Ha egy program megjelenésében, formalizmusában vagy a feldolgozott tananyagban nem fedi le a tanterv valamely zárt részhalmazát, attól az még jól felhasználható a tanítási órán, vagy azon kívül. A tananyagban egymáshoz kapcsolódó vagy szomszédos fogalmak (pl. elemi műveletek egész és törtszámokon) nem biztos, hogy ugyanazzal a számítógép-programmal gyakoroltathatók, sőt valószínű, hogy az eltérő írásmód egy-

mástól különböző programokat igényel, amelyek összevonását eröltetni pusztán didaktikai okokból célszerűtlen és gazdaságtalan. A jó program emberi léptékű ritmust, munkatempót, személyes kapcsolatot, az eredmény mérhetőségét és számontartását kínálja a tanulónak. A tetszetős képi megjelenés és hanghatás nem öncélú, hanem a figyelem fenntartását, a fiziológiai és érzelmi ráhangolódást szolgálja. Az elért teljesítmény kulturált értékelése magában rejtheti a morális nevelés lehetőségét is (a súgás anticipálása, a pozitív cselekvés támogatása).

A program technikai színvonala a kezelő számára elsősorban a biztonságos, gyors és automatikus működésből olvasható ki. A C—16 grafikus üzemmódját ismerők sejtik, hogy a szabadon maradó memóriában ekkora program nem férhet el, itt valami trükk van, például a memória többszörös kihasználása... Ez pedig köztudottan nem elemi programozási feladat. De a program magas technikai színvonalát mégsem a többszörös memória-kihasználás adja meg, hanem az a sok-sok esztétikai, pszichológiai, etikai és nevelési elgondolás, ami nagy műgonddal beleépült. Ezek pedig tagadhatatlanul pedagógiai értékek.

A program használatát a tanítóknak, tanároknak, a tanulóknak és szüleiknek egyaránt ajánljuk.

DR. MOLNÁR JÓZSEF
ny. vezető szakfelügyelő
Budapest

A matematikai gondolkodás fejlesztésének lehetőségei

Mind az általános iskola, mind a középiskolák matematika-tantervei feladatul írják elő a tanulók *gondolkodásának fejlesztését*. A matematikaoktatásban — természetesen — elsősorban az ún. *matematikai gondolkodás* fejlesztését kell feladatnak tekintenünk. Célszerű ezt kiemelnünk, mert más tantárgyak keretében is igyekeznek a gondolkodást fejleszteni, de gondolnunk kell arra, hogy a matematika legnagyobbrészt elvont fogalmakkal dolgozik. Az összefüggéseket, relációkat, tételeket általánosítva, jelekkel és szimbólumokkal, képletekkel igyekszik kifejteni. Állításait alapfogalmakra, alaptételekre, definíciókra, már igazolt tételekre alapozva logikai következtetéssel vezeti le. Ha az előzményeket igazaknak, érvényeseknek fogadjuk el, akkor azok logikai következményeit is igazaknak, érvényeseknek kell tartanunk, különben ellentmondásba kerülnénk. Az említettek miatt mondják a matematikát *hipotetikus-deduktív* tudománynak. A matematikai gondolkodás fejlesztésénél a matematikának ezt a jellegzetességét szem előtt kell tartanunk. Tervszerű, folyamatos oktató-nevelő munkával igyekeznünk kell elérni, hogy a tanulók képesek legyenek absztrakt fogalmak megértésére, tudatos használatára, a jeleket és szimbólumokat értelemszerűen alkalmazzák, továbbá megfelelő jártasságot szerezzenek a deduktív következtetésekben, állítások bizonyításában.

A feladat nem könnyű. A kívánt eredmény eléréséhez szükséges, hogy az általános és a középiskolák pedagógusainak fejlesztési munkáját tervszerűen összehangoljuk, s az ún. *töréseket kiküszöböljük*.

Nyilván kell, hogy minden iskolatípusban a tantervek — egymásra építve — a korszerű matematikai ismeretekből azokat írják elő, amelyek a társadalmi elvárások miatt *szükségesek*, de az életkori sajátosságokat tekintve eredményesen *taníthatók* is. Mind a minimalizmus, mind a maximalizmus kedvezőtlenül hat a gondolkodás fejlődésére. Például helyes, hogy már az alsó tagozatban elkezdik az ún. *halmazszemlélet* kialakítását, de nem célszerű feltenni olyan kérdést, hogy miből van több: egész számokból vagy törtekből? A 6—12 éves tanulók gondolkodása még erősen *a szemléletre támaszko-*

dik, s az előbbi kérdésre hibásan válaszolnak. Általában nem várható el tőlük, hogy megértsék: a végtelen halmazok számosságainak nagyság szerinti összehasonlításához nem elegendőek azok a módszerek, amelyeket a véges halmazok összehasonlításakor alkalmazunk. Kifogásolható az is, ha a kis gyerekeknek *korongot mutatunk*, s arra azt mondjuk, hogy *kör*. El kell kerülni, hogy a tanulók tudatában téves fogalmak, összefüggések, képzetek rögzítődjenek, mert ezek gátolni fogják a tiszta fogalmak kialakulását, s egyben a gondolkodásuk fejlődését is. Törekednünk kell az ismereteknek a tanulók értelmi szintjéhez igazodó *egyszerűsítésére*, de el kell kerülni *a torzításokat*.

Nagy szerepük van *a tankönyveknek* is a gondolkodás fejlesztésében. Ha érthetően, szabatosan, tanulhatóan, tervszerű módszerrel dolgozzák fel a tantervi anyagot, akkor ezzel segíthetik azt, hogy a tanulók rendszerezett, tartós ismereteket szerezzenek. Nem elég csak az órán okosan beszélgetni, vitatkozni ismeretekről. Vannak fogalmak, relációk, összefüggések, indokolások, amelyeket *meg is kell tanulni*. Amikor új ismereteket igyekszünk megérteni, vagy problémákat oldunk meg, akkor fogalmakat, állításokat, képzeteket kapcsolunk össze tudatunkban. Ha ezek nincsenek „működésre kész" állapotban az emlékezetünkben, akkor gondolkodási erőfeszítésünk nem járhat sikerrel. *Fontos az emlékezet fejlesztése* is. Az ún. *logikus emlékezet* fejlesztését a jó tankönyv segítheti.

Azt aligha kell bizonygatni, hogy a gondolkodás fejlesztésében a *legfontosabb szerepe a tanítónak, a tanárnak van*. Ha jól képzett, kellő gyakorlattal rendelkezik, lelkesedéssel tanít, saját gondolkodását és tudását is folyamatosan fejleszti, akkor érdeklődését, aktivitását, gondolkodásmódját átveszik tanítványai is. Törekednie kell arra, hogy tanítványai is *szeressenek, akarjanak* matematikát tanulni, problémákat megoldani.

Fontos szerepet kell tulajdonítani *a motivációnak* ahhoz, hogy a tanulókat önálló tanulásra, önálló gondolkodásra, problémamegoldásra serkentsük. Folyamatosan meg kell figyelnünk őket, tervszerű eredményvizsgálatokkal tájékozódnunk kell fejlődésükről. *Meg kell ismerni a tanulókat*. Pszichológiai vizsgálatok tapasztalatai szerint az alacsonyabb korcsoportok tanulóinak érdeklődése, gondolatvilága még erősen kötődik a mindennapi életük eseményeihez, szemléletükhöz, cselekedeteikhez, tapasztalataikhoz, primitív megítélésük szerinti érdekeikhez. Ezt figyelembe véve, hogy *érdeklődésüket felkeltsük és fenntartsuk*, célszerű az órákon olyan problémákból kiindulni, amelyeknek *gyakorlati vonatkozásai* vannak. Ilyenek: a bevásárlással, a közlekedéssel, a családi eseményekkel, a játékaikkal kapcsolatos példák, feladatok. A felső tagozatosoknál már mind nagyobb szerepet célszerű biztosítani a fizikával, a kémiával, a gyakorlati foglalkozásokkal stb.-vel való koncentrációnak. Ha az említett tárgyakból vett feladatok megoldásában nehézségeik merülnek fel, az nem azt jelenti, hogy nem tudnak gondolkodni, hanem hiányosak lehetnek tárgyi ismereteik. Ezeket — szükség esetén — a matematikatanár is tudja pótolni. Az életből és a más tárgyakból vett feladatok megoldatásával meggyőzhetjük a tanulókat arról, hogy a matematika nemcsak érdekes, hanem *hasznos is*, ezért is érdemes tanulni.

El kell azonban kerülni, hogy a tanulók gondolkodása a szűk *prakticizmusra* állítódjék be. Nem lehet minden matematikai ismeret szükségességét, használhatóságát a tanulóknak közvetlenül megmutatni. Szükséges az absztrakció, az általánosítás, a fogalmi gondolkodás, a logikai következtetéssel való ismeretszerzés. A pszichológiai kísérletek tanulsága szerint az emberek akkor képesek ismereteiket más területeken alkalmazni, ha azok *tudatosak, s eléggé általánosak* és *absztraktak*. Az életszerűség és a gyakorlatiasság folyamatos szemmeltartása mellett, fokozatosan kell adni a tanulóknak olyan feladatokat is, amelyek a szemlé-

lettől és a gyakorlattól való elszakadást, és tisztán a fogalmakkal való műveletek végzését teszik szükségessé. Ilyenek a számok tulajdonságaira, a számrendszerekre, a számokkal való műveletek tulajdonságaira, a jelek és szimbólumok tudatos használatára, a köznapi nyelvnek a „matematikai nyelvre" való lefordítására vonatkozó feladatok. A halmazelméletből, a kombinatorikából, a geometriai szerkesztésekből vett, tervszerűen válogatott feladatok jól támogatják az elvont gondolkodás fejlődését. Még hatásosabban fejlesztik és teszik tudatosabbá a logikus gondolkodást *a bizonyítási feladatok.* Ezek megoldásával kapcsolatban tisztázható az, hogy melyek az *alapfogalmak* (pl. pont, egyenes, halmaz, hozzárendelés stb.); milyen szerepük van a *definícióknak,* s hogyan kell azokat megfogalmazni; mely állításokat fogadjunk el *alaptételeknek, axiómáknak;* a bizonyításoknál mi *a feltétel,* mi *a tétel,* milyen kapcsolat van a tétel és *a megfordítása* között; melyek *a logikai következtetés* legfontosabb szabályai. A középiskolákban nincs rendszeres logikaoktatás, ezért a matematikaórákon kell erre sort keríteni a megfelelő alkalmakkor. A begyakoroltatás folyamatosan történik, ha egyrészt a feladatmegoldásoknál rendszeresen megkívánjuk a *lépések indokolását,* a szükséges *diszkussziókat;* másrészt, ha rendszeresen és folyamatosan adunk fel bizonyítási feladatokat.

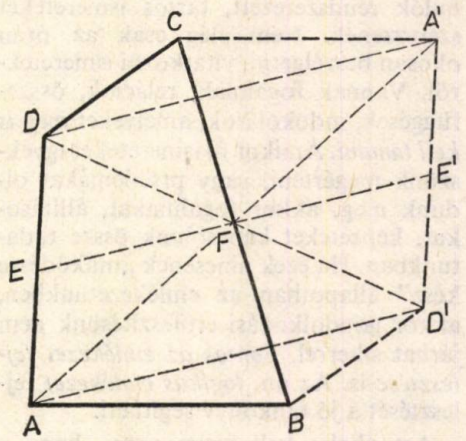
A korszerű matematika egyik jellemzője az, hogy *halmazelméleti megalapozású,* s nagy szerepe van benne *a leképezéseknek, relációknak, a függvénykapcsolatoknak.* A tanulók *dialektikus* gondolkodásának kialakulását is segítjük, ha folyamatosan felhívjuk figyelmüket a mennyiségek összefüggésére, egymástól függő kölcsönös változásaira.

A geometriatanításban *a transzformációk* tervszerű tanításával segíthetjük a tanulók *függvényszemléletének* fejlődését. A transzformációk fogalmát, tulajdonságaikat jól meg kell érteniük a tanulóknak, mert csak így várható el eredményes alkalmazásuk. Nem szabad megelégedni sablonos feladatok unalmas gyakoroltatásával, mert akkor a tanulók kérdezhetik, hogy *miért tanulják, mire használhatják a transzformációkat.* Tanulságos, igényes feladatok kitűzésével és a megoldások alapos megbeszélésével elérhetjük, hogy *az ismeretek tárgyon belüli alkalmazásainak* is jelentőséget tulajdonítsanak a tanulók. Egy ilyen feladat pl.:

Igazoljuk, hogy konvex négyszög bármelyik középvonala nem nagyobb, mint a két „szemközti" oldal számtani közepe. A bizonyításhoz a BC oldal F felezőpontjára vonatkozó tükrözést használjuk: $AD'A'D$ paralelogramma.

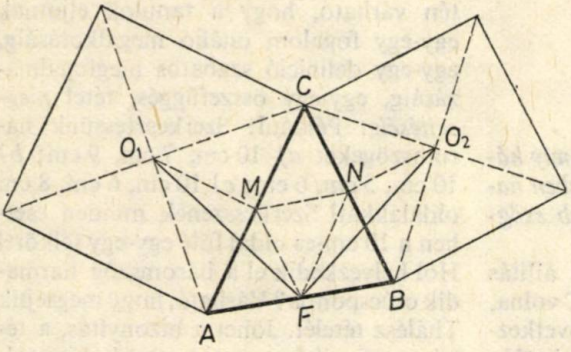
$$EE' = 2 \cdot EF = AD' \leqq AB + BD' = AB + CD.$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $ABCD$ trapéz. (Értékes következmény!)



A párhuzamos eltolás szerepét, hasznát mutathatjuk meg a következő feladat megoldásának megbeszélésével: *Szerkesszünk konvex négyszöget, ha adott a négy oldala és az egyik középvonala!* (Megoldás: Az AD és a BC oldalt párhuzamosan eltoljuk a KL középvonal K pontjához. Így egy $A'B'K$ háromszöget kapunk, amelynek ismerjük a KL súlyvonalát stb.) A párhuzamos eltolás alkalmazása nélkül nehéz volna a megoldás.

Új és nehéz fogalom a középiskolában a *vektor fogalma*. Ha már tisztáztuk a fogalmat, tisztáztuk az egyenlőségi relációt, megbeszéltük azt, hogy hogyan értelmezzük a vektorok halmazán az összeadást, s észrevétettük, hogy ennek a műveletnek azok a tulajdonságai, mint az egész számok halmazán az összeadásnak, akkor ismét ne elégedjünk meg sablonfeladatok megoldatásával. Hasznos lehet a következő probléma megbeszélése: *Rajzoljuk meg az ABC hegyesszögű háromszöget! Szerkesszünk az AC és BC oldalakra „kifelé" négyzeteket! Kössük össze ezek O_1 és O_2 centrumát az AB oldal F felezőpontjával! Igazoljuk, hogy $FO_1 = FO_2$, és $FO_1 \perp FO_2$.* Jelöljük *M*-mel és *N*-nel az *AC* és a *BC* oldalak felezőpontját! Tekintsük az FMO_1 és az FNO_2 háromszögeket! Látható, hogy $\overrightarrow{NO_2}$ derékszögű



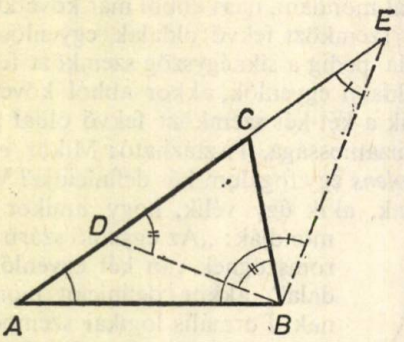
elforgatottja $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{FM}$, és $\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{MC}$ derékszögű elforgatottja $\overrightarrow{MO_1}$. Mivel a vektort két komponense egyértelműen meghatározza, továbbá a vektor derékszögű elforgatottja egyenlő komponensei derékszögű elforgatottjainak összegével, azért $\overrightarrow{FO_2}$ derékszögű elforgatottja $\overrightarrow{FO_1}$. Nem a sok sablonos, hanem a kevés igényes feladat megoldásának megbeszélése, tudatosítása alkalmas a gondolkodás fejlesztésére.

Számos érettségi és felvételi írásbeli dolgozat vizsgálata az utóbbi években azt mutatta, hogy többen nem tudták, mit jelent fogalmat definiálni, mit jelent a szükséges, mit az elégséges, s végül mit a szükséges és elégséges feltétel. Melyek a logikai következtetés szabályai? Például: „Parabola azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek egy adott ponttól és egy adott egyenestől egyenlő távolságra vannak. (Kimaradt: „a síkban", „az adott pont nem illeszkedik az adott egyenesre".) Vagy: „Paralelogramma az a négyszög, amelynek szemközt fekvő oldalai párhuzamosak és egyenlők." Jó gyakorlat megmutatni, hogy elegendő a szemközt fekvő oldalak párhuzamosságát mondani, mert ebből már következik a szemközt fekvő oldalak egyenlősége. Ha pedig a síknégyszög szemközt fekvő oldalai egyenlők, akkor abból következik a két-két szemközt fekvő oldal párhuzamossága. Tisztázható: Mikor *ekvivalens* egy fogalom két definíciója? Vannak, akik úgy vélik, hogy amikor azt mondják: „Az egyenlő szárú háromszögnek van két egyenlő oldala", akkor definíciót mondanak. Formális logikai szempontból ez *állítás*, amely a definícióból következik.

Ha a tanulók már eljutnak a fogalmi gondolkodás szintjére, akkor célszerű számukra tisztázni: Amikor pl. a geometriában egy tételt bizonyítunk, akkor nem azt bizonyítjuk, hogy az állítás a valóságban igaz, — a tényeket hűen tükrözi, hanem csak azt, hogy az előzményekből, a premisszákból *a logika szabályai szerint következik.*

Több didaktikai kísérlet mutatta, hogy nem járt kellő eredménnyel, ha a geometriát a középiskolában *axiomatikus felépítésben* tanítjuk. Az viszont hibának volna minősíthető, ha nem kapnának erről vázlatos tájékoztatást. „Két pont között legrövidebb az egyenes út" — már a geometriatanulás kezdetén szemléletből elfogadják, és a továbbiakban használják is (pl. az ún. „háromszög-egyenlőtlenség" formájában). Megmutatható, hogy ez is bizonyítható: Vegyük pl. a következő tételt: *A háromszögekben na-*

gyobb oldallal nagyobb szög fekszik szemközt, mint a kisebb oldallal szemben. Ha már igazoltuk, hogy a háromszög bármely külső szöge nagyobb, mint a melette nem fekvő akármelyik belső szöge, akkor a bizonyítás: Ha $AC>BC$, akkor van AC oldalon olyan D pont, hogy $CB=CD$. Ekkor $CAB\sphericalangle<CDB\sphericalangle=CBD\sphericalangle<CBA\sphericalangle$. Ha az AC szakasz meghosszabbításán E olyan pont, hogy $CE=CB$, akkor $CEB\sphericalangle=CBE\sphericalangle<EBA\sphericalangle$, ezért $AB<AE=AC+BC$.



Bizonyítsuk még be, hogy *bármely háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik, mint a kisebb szöggel szemben.*

Feltétel: $CBA\sphericalangle>CAB\sphericalangle$; állítás $AC>BC$. Bizonyítás: Ha $AC=BC$ volna, akkor ebből $CBA\sphericalangle=CAB\sphericalangle$ következnék, ami *ellentmond a feltételnek.* Ha $AC<BC$ volna, akkor ebből $CBA\sphericalangle<CAB\sphericalangle$ következnék. Ez is ellentmondás. Ezért csak $AC>BC$ lehet. Ez utóbbi tétel a megelőző *megfordítása* volt. Tisztázzuk, hogy miért. Az előző bizonyítást *direktnek* mondják, mert az előzményekből az állítás *közvetlenül következik.* Az utóbbi bizonyítási mód *indirekt:* Ha az állításnak ellentmondó relációt tételezünk fel, akkor a feltétellel ellentmondásba kerülünk. Szükséges, hogy a tanulók megismerjék és tudatosan használják a különböző bizonyítási eljárásokat.

A mai korszerű didaktikai felfogás az, hogy minél kevesebb kész ismeretet adjunk a tanulóknak, neveljünk *önálló, kreatív gondolkodásra.* Jó volna ehhez minél több hatásos gyakorlati eljárást ismerni. Mivel ilyenek csekély számban állnak rendelkezésünkre, azért célszerű *óvatosnak* lennünk. Csak megfelelő előismeretek és megfelelő értelmi szint esetén várható, hogy a tanulók eljutnak egy-egy fogalom önálló megalkotásáig, egy-egy definíció szabatos megfogalmazásáig, egy-egy összefüggés, tétel *megsejtéséig.* Például: Szerkesztessünk háromszögeket *a)* 10 cm, 7 cm, 9 cm; *b)* 10 cm, 5 cm, 6 cm; *c)* 10 cm, 6 cm, 8 cm oldalakkal! Szerkesszenek minden esetben a 10 cm-es oldal fölé egy-egy félkört! Hol helyezkedik el a háromszög harmadik csúcspontja? Várható, hogy megsejtik Thálész tételét. Jöhet a bizonyítás, a tétel megfordítása, majd annak bizonyítása stb.

DR. HAJNAL IMRE
vezető szaktanácsadó
Szeged

A gimnáziumok I. osztálya számára megjelenő új tankönyvről

Az új kezdeményezések megvalósítása mindig eredményez új tapasztalatokat. Ezek a tapasztalatok gyakran kívánják az új kezdeményezések kisebb-nagyobb módosítását. Ez így van a tanterveknél is. Természetesnek tekinthetjük, hogy kisebb korrekciókkal 1988 őszétől módosul az a gimnáziumi tanterv, amelynek bevezetése 1979-ben kezdődött. (A pontosan 100 évvel korábban, 1879-ben indult és nagyon jól előkészített Trefort-féle tanterv első korrekciójára már négy év múlva, 1883-ban sor került.)

A tantervi korrekció megvalósításához

nagy segítség lesz az, hogy a meglevő két párhuzamos tankönyv a korrekciónak megfelelően átdolgozásra kerül, és *megjelenik egy új, harmadik tankönyv, amely a korrekcióval módosított tanterv alapján készült.* A tankönyv Hajnal Imre, a számítástechnikai függeléke Némethy Katalin munkája. (Matematika a gimnáziumok I. osztálya számára, 13 141 sz. tankönyv.)

Melyek azok az elvek és szempontok, amelyek az új tankönyv írásánál jelentős szerepet kaptak?

1. Az elmúlt esztendők tapasztalatai, az I. osztályban is lehetséges fakultáció, az egyes osztályok közötti különbségek azt kívánják, hogy a tankönyv egyaránt foglalkozzon a törzsanyaggal és a kiegészítő anyagrészekkel.

A korrekciós tantervben *kiegészítő anyagként szerepelnek számítástechnikai ismeretek is.* A szaktanár döntése szerint ezek taníthatók. A kiegészítő anyag tanulását azonban a szaktanár nem teheti kötelezővé. (Lásd: „A gimnáziumi nevelés és oktatás terve", 1978, 30. oldal.)

2. A tantervi anyag kismértékű korszerűsítésével az I. osztályba kerül a négyzetgyök fogalma, azonosságai, Pitagorasz tétele, a középpontos hasonlósági transzformáció (ezek már az általános iskolai anyagban is szerepelnek), és kiegészítő anyagként tárgyalható a hegyes szögek szögfüggvényeinek értelmezése.

A korrekció hatására a tankönyvben időben elsőséget és megfelelő súlyt kapnak *az eszköz jellegű ismeretek* (az azonos átalakítások, egyenletek megoldása, az egybevágósági, hasonlósági transzformáció tulajdonságai, síkidomok egybevágósága, hasonlósága).

Néhány anyagrésznek az eddiginél korábbi tárgyalása miatt a II. osztályba kerül néhány olyan geometriai ismeret, amelynek korai tárgyalását nem indokolja semmi sem. (Ilyenek a kerületi és középponti szögek tétele, húrnégyszögekre, érintőnégyszögekre vonatkozó ismeretek.)

3. A törzsanyagot és a kiegészítő anyagot a tankönyv szemmel láthatóan megkülönbözteti. A tankönyvben a kiegészítő anyag apróbetűs szedésben olvasható. Ugyanilyen szedésűek a történeti adatok, utalások is. Ezeket a részeket felesleges lenne tanítani, de illő, hogy az érdeklődő tanulók lássanak-halljanak valami keveset a matematikai ismeretek kialakulásáról, történetéről is.

4. A tankönyv egy „Bevezetés" című fejezettel kezdődik. (Ez olvasmánynak is tekinthető.) Ebben két olyan feladat megoldása van, amilyeneket a tanulók már az általános iskolában megszoktak. A két feladat megoldása rövid, de a megoldások elemzésére is sor kerül. Közben utalás van a matematika módszerére is, arra, hogy a matematikában fogalmakkal dolgozunk, azokról állítunk valamit. Vannak alapfogalmak, vannak olyanok, amelyeket nem tekintünk alapfogalmaknak, ezeket pontosan kell meghatározni (definiálni). Az elemzés során kiderül az is, hogy némely állítást a tapasztalatok alapján természetesnek fogadunk el (ezek az axiómák), másokat helyes következtetésekkel bizonyítani kell (tételek).

Ennek a fejezetnek az a célja, hogy a tanulók idejében meglássák és tudatosan érezzék a fogalmak tisztázásának, a tételek bizonyításának a szükségességét. Ezt „leckeként" megtanítani nem lehet.

Ez a fejezet szerkezetileg is elkülönül a többitől (nincs sorszámozva sem). Szokatlansága miatt felhívja a tanulók figyelmét arra is, hogy néhány hét múlva olvassák el újra, a tanév végén, ismétléskor feltétlenül.

5. A tankönyv 33 fejezetre van tagolva. Ezek terjedelme különböző. Köztük akad olyan is, amely teljes egészében kiegészítő anyag (apróbetűs), van olyan is, amely csak egy órányi anyagot tartalmaz, de van olyan is, amely több órányit (pl. egy fejezetben tárgyalja, de azon belül világosan tagolja a nevezetes szorzatokat, szorzattá alakításokat).

A könyv szakmai-logikai felépítésére csak rövid utalás az, hogy a betűk használata, az azonos átalakítások, az egész

kitevőjű hatványok értelmezése, azonosságai, a négyzetgyök fogalma és azonosságai után következik a függvény fogalmának tisztázása, majd a gyakran előforduló függvények, utána az egyismeretlenes egyenletek, egyenlőtlenségek. A geometriai ismeretek nemcsak a geometriai transzformációkhoz kapcsolódnak, hanem a nevezetes síkidomok szerint tagolva is szerepelnek. A vektorok és a vektorokkal értelmezett műveletek önálló fejezetet alkotnak. A geometriai rész után következnek a függvénytranszformációk. A tankönyv utolsó fejezete az elsőfokú egyenletrendszerekkel foglalkozik. (Ezt követi egy olvasmány az egyenletek közelítő megoldásáról.)

6. Egy-egy fejezet az anyag motivációjával kezdődik. A bevezető példák olyanok, hogy azok helyett könnyen lehet mást választani, olyanokat, amelyeket az osztály színvonala kíván.

Az új fogalmak definíciójánál, a tárgyalt tételeknél a törekvés nemcsak az, hogy leírásuk világos, érthető legyen, hanem az is, hogy nyomdatechnikailag is áttekinthetők legyenek.

7. Minden fejezet után van néhány kitűzött feladat, de szükséges lesz a példatárak használata is. (A tankönyvben 283 kitűzött feladat van. Közöttük a kiegészítő anyaghoz kapcsolódókat * jelöli.)

8. A kiegészítő anyag számítástechnikai része a tankönyv végén, „Függelék"-ben található. Az I. osztály tantervében mindössze a számítástechnika *elemei* vannak. (Az elemek kismértékű továbbfejlesztését a II. osztályos tanterv tervezi.)

A számítástechnikai rész beépíthető a matematikai anyag tárgyalásába. Ezért ezek az elemi ismeretek egy-egy órán összefonódhatnak a matematikai ismeretek gyakorlásával.

*

A tankönyv szakmai nézőpontja hasonlít a speciális matematika tagozatú I. osztályok számára 1986-ban megjelent tankönyv nézőpontjához. Természetes azonban, hogy a most megjelenő könyv anyaga és szakmai igényei az alaptanterv követelményeihez igazodnak. Természetes az is, hogy a két tankönyv között didaktikailag nagy különbség van.

A tankönyvírás rendkívül nehéz feladat. Nagyon nehéz, mert nemcsak a szakmai szempontokat kell figyelembe venni, hanem azt is, hogyan lehet a tanulni akaróknak a gondolkodásmódját úgy irányítani, hogy azok a vezetés mellett az önálló gondolkodást is elsajátítsák. Bármennyire is törekszik a tankönyvíró erre, nem biztos, hogy sikerült ezt elérni.

1743-ban Maróthi György — az akkori idők legjobb magyar Aritmetika tankönyvének az írója — könyvének „Előljáró beszédében" ezt írta: „... megköszönöm, ha értelmes Emberek tudtomra adják, hol, mit, és miképpen lehetne világosabban, vagy könnyebb móddal elő adni? Mert nem tsak az, hogy magam-is örömest kívánok, akárkitől lehet, tanulni; hanem annakfelette az illyen közönséges haszonra való Munkákat úgy lehet tökéletességre vinni, ha a mit a könyvíró magától fel-nem talál, azt más okos Emberek' jó tanáts-adása ki-pótolja. Mert e' nem ollyan dolog, hogy ebben a' könyv-írónak tsak a maga elméjét kellene mutogatni; hanem mindenekben a' Köz-haszonra kell nézni."

E tankönyv szerzői is ugyanazt érzik és kérik.

MIHALOVICS SÁNDOR
középiskolai tanár
Esztergom

Ptolemaiosz tételéhez kapcsolódó megjegyzések

Az általános tantervű gimnáziumok második osztálya számára ajánlott matematika feladatlapokból a 24. a Ptolemaiosz nevet kapta. Korányi Erzsébet, a feladatlap összeállítója ennek a tételnek az átlagosnál nagyobb jelentőséget tulajdonít. Mi adhatja ezt? Adhatja pl. az a tény, amely szerint Ptolemaiosz tételét a Pitagorasz tételének általánosításaként kezelhetjük, hiszen ebbe megy át, ha téglalapra alkalmazzuk. Adhatják továbbá az összetett feladatokhoz tartozó azok a feladatmegoldási utak, amelyek magát a tételt nélkülözhetetlennek ítélik meg. De ezenkívül adhatja számtalan olyan feladat vagy feladatelem, amely valamilyen módon kapcsolódik a tételhez. Érdemes lenne ebből a problémasokaságból felvillantani néhányat.

Ptolemaiosz tételén a következőt szoktuk érteni: *a húrnégyszög átlóinak szorzata a szemközti oldalak szorzatának összegével egyenlő.*

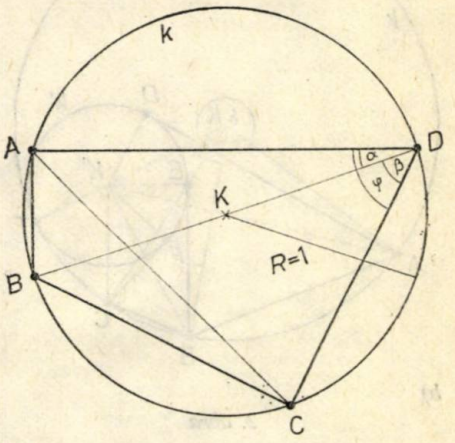
A tételt a jelzett feladatlap lépéselemei szerint, a matematika fakultációs osztályok szakköri foglalkozásain pedig akár inverzió felhasználásával is bizonyíthatjuk.

Természetesen fennáll az említett tétel megfordítása is. Gyakran a két ítélet együttes, egyetlen állítás formájában való megfogalmazását tekintik Ptolemaiosz tételének. Ez pedig így hangzik: *az ABCD konvex négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha* $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$.

Claudius Ptolemaios az ókori csillagászat kiemelkedő egyénisége volt. Életéről keveset tudunk. Valószínűleg a belső-egyiptomi Hermein városban született 87-ben. Alexandriában élt. Itt végezte csillagászati megfigyeléseit. Főműve az Almagest. Ebben a róla elnevezett ptolemaioszi világrendszert fejtette ki. Rendszere a legteljesebb geocentrikus rendszer, amelynek helyébe Kopernikusz csak több, mint ezer év múlva állította a heliocentrikus rendszert.

Ptolemaiosz a geometria és az optika területén is számos eredményt ért el.

A Ptolemaioszról elnevezett tétel ismert volt már Arkhimédész (i. e. 287—212) előtt is, s ezért Ptolemaiosz nem lehetett ennek a szerzője. Az ő nevével azért hozzák összefüggésbe, mert ez a tétel az ő csillagászati hipotézis-rendszerében igen nagy szerepet játszott. Számításaiban közvetett módon használta a sinusfüggvényt. A sinusfüggvény adatait anélkül alkalmazta, hogy ezt a ma használatos fogalmat ismerte volna.



1. ábra

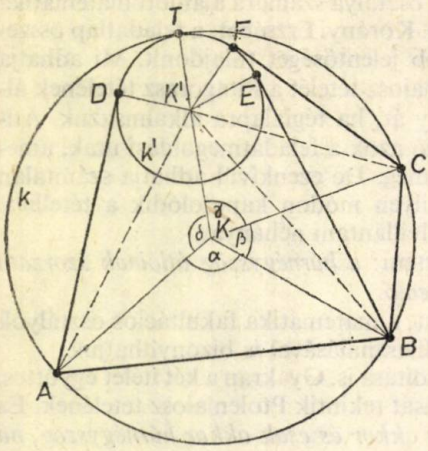
Ptolemaiosz $(\sin \varphi)$-n az egységnyi sugarú körbe írt, BD átmérővel megegyező átlójú $ABCD$ négyszög φ szöggel szemben fekvő rövidebbik átlójának felét értette.

Az 1. ábra jelöléseit használva: $\sin \alpha = \frac{AB}{2}$, tehát $AB = 2 \cdot \sin \alpha$, hasonlóképpen $DA = 2 \cdot \cos \alpha$, $BC = 2 \cdot \sin \beta$, $CD = 2 \cdot \cos \beta$. Ebből következik, hogy

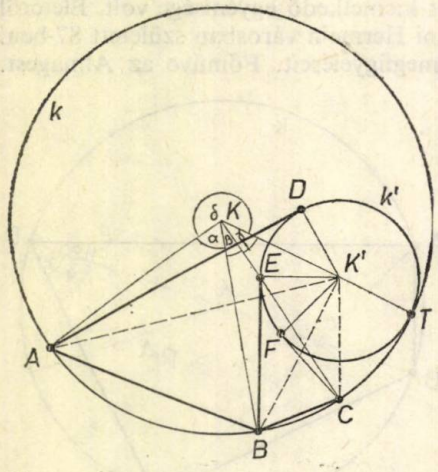
$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = 2 \cdot \sin \alpha \cdot 2 \cdot \cos \beta + 2 \cdot \sin \beta \cdot 2 \cdot \cos \alpha =$$

$$= 2(\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta) \cdot 2 = 2 \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot 2 = 2 \cdot \sin \varphi \cdot 2 = AC \cdot BD.$$

Térjünk vissza magához a tételhez, de most kicsit magasabb szinten! A fakultatív, avagy a szakköri foglalkozásokon sort keríthetünk Ptolemaiosz tételének általánosítására. Az általánosítás lehet szűkebb és tágabb. Vázlatosan vegyük szemügyre mindkettőt!



a)



b)

2. ábra

Tekintsük az első állítást és bizonyítsuk be! Az állítás így hangzik: Adott a k kör és ezt T pontban belülről érintő k' kör, továbbá a k kör T-től különböző A és C, valamint ezek között elhelyezkedő B pontja. Ezekből mint külső pontokból szerkesszük meg a k' körhöz húzható AD, BE, CF érintőszakaszokat! Bizonyítsuk be, hogy az érintőszakaszok és az A, B, C pontok által meghatározott szakaszok között $AB \cdot CF + BC \cdot AD = AC \cdot BE$ összefüggés áll fenn!

A bizonyítást a *2.a)* és a *2.b) ábrák* felhasználásával végezzük el. Röviden a jelölésekről. A k kör középpontja legyen K, sugara R. A k' kör középpontját jelöljük K'-vel, sugarát r-rel! A középponti szögekre vezessük be az α, β, γ és δ jelölést!

Az AK', BK' és CK' szakaszok hossza cosinustétellel, az AD, BE és CF érintőszakaszok hossza pedig az előzőekből nyerhető Pitagorasz tételével:

$$AD^2 = (2R^2 - 2Rr)(1 - \cos\delta),$$

$$BE^2 = (2R^2 - 2Rr)[1 - \cos(\beta + \gamma)],$$

$$CF^2 = (2R^2 - 2Rr)(1 - \cos\gamma).$$

Ezért a k körbe írt ABC háromszög oldalai:

$$AB^2 = 2R^2(1 - \cos\alpha),$$

$$BC^2 = 2R^2(1 - \cos\beta),$$

$$AC^2 = 2R^2[1 - \cos(\alpha + \beta)].$$

Mivel $\alpha + \beta = 360° - (\gamma + \delta)$, ezért a bizonyítandó összefüggés az eddig nyert kifejezésekkel való átírással:

$$\sqrt{1-\cos\alpha}\,\sqrt{1-\cos\gamma} + \sqrt{1-\cos\beta}\,\sqrt{1-\cos\delta} = \sqrt{1-\cos(\gamma+\delta)}\,\sqrt{1-\cos(\beta+\gamma)},$$

amely az

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

goniometriai azonosság segítségével:

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|\left|\sin\frac{\gamma}{2}\right| + \left|\sin\frac{\beta}{2}\right|\left|\sin\frac{\delta}{2}\right| = \left|\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\right|\left|\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\right|.$$

Az itteni félszögek 180°-nál kisebbek, ezért a bizonyítandó összefüggés átírható abszolútértékek nélkül is, azaz:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta}{2}=\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

A bal oldal átalakításához a

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos\delta-\cos\gamma=-2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\sin\frac{\delta-\gamma}{2},$$

$$\sin\gamma+\sin\delta=2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\delta-\gamma}{2}$$

összefüggéseket felhasználva a

$$\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\left[\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\sin\frac{\gamma-\delta}{2}+\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\cos\frac{\delta-\gamma}{2}\right]$$

alakot nyerjük. Ez tovább alakítható a $\sin(\alpha+\beta)$-ra vonatkozó azonossággal a

$$\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\delta}{2}-\frac{\delta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$$

kapcsolattá, ami viszont már a bizonyítandó összefüggés jobb oldalát jelenti. Ezt kívántuk belátni.

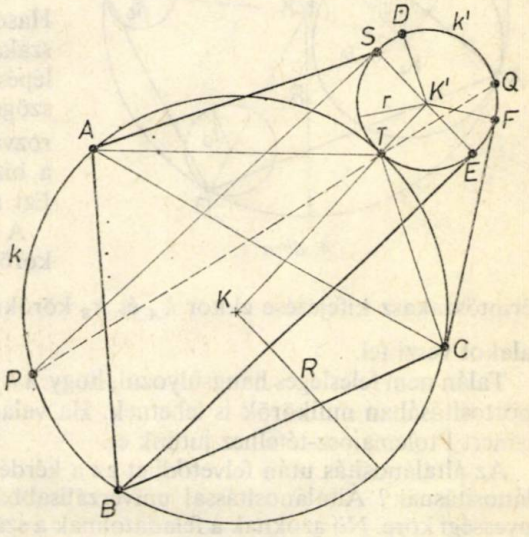
A bizonyítást arra az esetre végeztük el, amikor a k' kör belülről érintette a k kört. Hasonlóképpen látható be az is, amikor a k' kör kívülről érinti a k kört. A bizonyításban az előzőhöz hasonló utat követhetnénk, miközben $R-r$ helyett $(R+r)$-et szerepeltetnénk. De eljárhatnánk másképpen is. Talán nem lesz haszontalan, ha ebből a másik bizonyítási eljárásból kiragadjuk a főbb mozzanatokat.

Induljunk ki a *3. ábrából!* Mivel a két kör belső hasonlósági pontja T, ezért a P és Q megfelelő pontokra $TQ:TP=\lambda$, s ezért $\frac{PQ}{PT}=1+\lambda$. Ha a P pontból a k körhöz vont érintőszakasz PS, akkor

$$\frac{PQ}{PT}=\frac{PQ\cdot PT}{PT^2}=\frac{PS^2}{PT^2}$$

és

$$\frac{PS}{PT}=\sqrt{1+\lambda}.$$



3. ábra

Ha P helyett az A, B és C pontokat vesszük, akkor

$$\frac{AT}{AD} = \frac{BT}{BE} = \frac{CT}{CF} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}},$$

amiből AT-t, BT-t és CT-t kifejezve, majd az $ABCT$ húrnégyszögre felírt, Ptolemaiosz tételét jelentő kifejezésbe helyettesítve, a kívánt $AB \cdot CF + BC \cdot AD = AC \cdot BE$ összefüggéshez jutunk.

Sajátos eset áll elő mind a kétszer, ha a k' kör r sugara zérushoz tart. Határesetben a D, E, F érintési pontok egybeesnek a T ponttal. Létrejön az $ABCT$ húrnégyszög, és a kiindulási összefüggés átmegy a már jól ismert ptolemaioszi összefüggésbe.

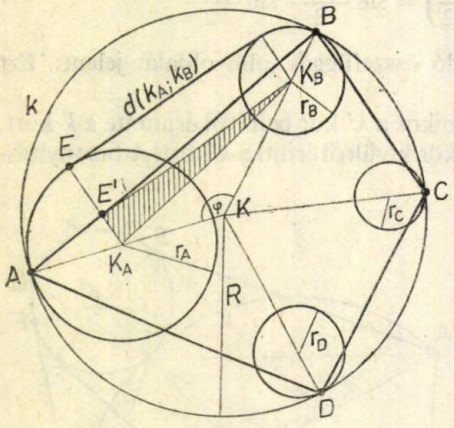
Ptolemaiosz tételének ez a szűkebb általánosítása mindjárt öltetet adhat ahhoz is, hogy milyen irányban lehet a tételt tovább bővíteni. Az ötlet kézenfekvő. Egy kör helyett négyet kell vennünk. A tágabb általánosítás tehát így fog hangzani: Legyen $ABCD$ a k körbe írt húrnégyszög! A k kört a négyszög csúcsaiban belülről érintő körök legyenek k_A, k_B, k_C és k_D. Bizonyítsuk be, hogy ezeknek a köröknek páronként vett érintőszakaszai között a

$$d(k_A, k_B)\, d(k_C, k_D) + d(k_B, k_C)\, d(k_A, k_D) = d(k_A, k_C)\, d(k_B, k_D)$$

kapcsolat áll fenn, ahol $d(k_A, k_B)$ jelenti a k_A és k_B körök külső érintőszakaszát.

A bizonyításhoz használjuk fel a *4. ábrát!* Az ábra jelöléseit felhasználva:

$$d^2(k_A, k_B) = K_A K_B^2 - (r_A - r_B)^2 = (R - r_A)^2 + (R - r_B)^2 - 2(R - r_A)(R - r_B)\cos\varphi.$$



4. ábra

Ugyanakkor $AB^2 = 2R^2(1 - \cos\varphi)$, ahol

$$\varphi = AKB\sphericalangle,$$

s ezért

$$d(k_A, k_B) = \frac{AB}{R}\sqrt{(R - r_A)(R - r_B)}.$$

Hasonlóképpen írható fel a többi érintőszakasz hossza is. A bizonyítás következő lépéseként írjuk fel az $ABCD$ húrnégyszögre Ptolemaiosz tételét! Ezt végigszorozva $\sqrt{(R-r_A)(R-r_B)(R-r_C)(R-r_D)}$-vel a bizonyítandó összefüggéshez jutunk el. Ezt akartuk bizonyítani.

A tétel akkor is igaz, ha a szóban forgó körök kívülről érintik a k kört. A közös érintőszakasz kifejezése ekkor k_A és k_B körökre a $d(k_A, k_B) = \frac{AB}{R}\sqrt{(R + r_A)(R + r_B)}$ alakot veszi fel.

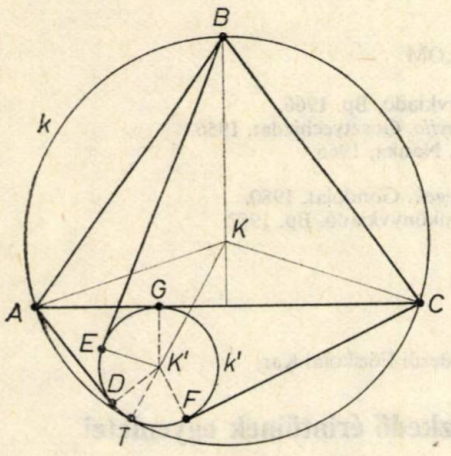
Talán nem felesleges hangsúlyozni, hogy a k_A, k_B, k_C és k_D körök bármilyen csoportosításában nullkörök is lehetnek. Ha valamennyi kör nullkör, akkor a már jól ismert Ptolemaiosz-tételhez jutunk el.

Az általánosítás után felvetődhet az a kérdés is, hogy mi a haszna egy ilyen általánosításnak? Általánosítással univerzálisabbá válik a tétel. Kiszélesedik az érvényességi köre. Nő azoknak a feladatoknak a száma, amelyek megoldásába bevonható közvetlenül vagy közvetett módon. De nem csupán erről van szó, hanem arról is,

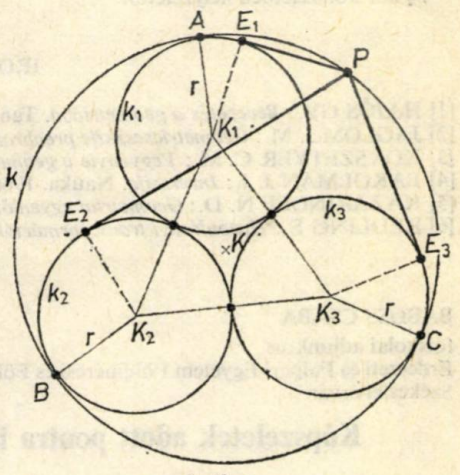
hogy nagyon sok feladat megoldását többszörösen leegyszerűsíti. Ez a dolog minőségi oldala. Ebben áll az általánosítás igazi haszna. Vizsgáljuk meg ezt két konkrét feladaton!

Első feladatként vegyünk szemügyre egy egyenlő szárú háromszöget! Az ABC egyenlő szárú háromszög ($AB=BC$) köré írt kör háromszöget nem tartalmazó körszeletébe írjunk tetszőleges, k' érintőkört! Bizonyítsuk be, hogy a B pontból a k' körhöz húzott érintőszakasz hossza független a k' kör megválasztásától *(5. ábra)*!

A bizonyításhoz induljunk ki a szűkebb általánosításból! Eszerint $AB \cdot CF + BC \cdot AD = AC \cdot BE$. Mivel a háromszög egyenlő szárú, ezért $AB(CF+AD)=AC \cdot BE$. A külső pontból vont érintőszakaszok egyenlősége miatt $AD=AG$ és $CG=CF$. Ezért: $CF+AD=AG+GC=AC$. A keresett BE érintőszakasz egyenlő AB-vel, azaz valóban független a k' érintőkör körszeletbeli elhelyezkedésétől.



5. ábra



6. ábra

A második feladat ugyancsak érintőszakaszokkal kapcsolatos. Röviden a következő: A k_1, k_2, k_3 egyenlő sugarú körök páronként érintik egymást és belülről érintik a k kört. Bizonyítsuk be, hogy a k kör tetszőleges pontjából a beírt körökhöz vont három érintőszakasz közül a két kisebbik összege egyenlő a harmadikkal *(6. ábra)!*

A feladat bizonyításához használjuk fel a tétel tágabb általánosítását! Az érintőszakaszok hossza legyen rendre $d_1=d(k_1, P)$, $d_2=d(k_2, P)$, $d_3=d(k_3, P)$ és $d_4=d(k_1, k_2)=d(k_1, k_3)=d(k_2, k_3)$, ahol a P pontot nullkörnek tekintjük. A tétel értelmében $d_1d_4+d_3d_4=d_2d_4$, azaz $d_1+d_3=d_2$, ami már a bizonyítandó állítást jelenti.

Talán ennyi elegendő. A feladatok sorát lehetne folytatni. Ez a tény választ ad arra is, hogy mi lehet a Ptolemaiosz tételéhez kapcsolódó megjegyzések célja. Röviden: az, hogy elősegítse a tételnek a középiskolai anyagba való jobb és gondosabb beépítését.

Ezt a törekvést segíthetik a következő feladatok is:

1. Bizonyítsuk be, hogy a sík tetszőleges $ABCD$ konvex négyszögére fennáll az $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqq AC \cdot BD$ összefüggés, ahol az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a négyszög húrnégyszög (illetve, ha az A, B, C, D pontok ebben a sorrendben egy egyenesen helyezkednek el).
2. Legyen P az ABC szabályos háromszög köré írt kör AB ívének tetszőleges belső pontja! Bizonyítsuk be, hogy ekkor: $PA+PB=PC$.

3. Ha az ABC egyenlő szárú háromszög ($AC=BC$) köré írt kör AB ívének belső pontja P, akkor a $\frac{PA+PB}{PC}$ hányados független a P pont AB ívbeli helyzetétől. Bizonyítsuk be!

4. Az $ABCD$ négyzet köré írt kör AB ívének belső pontja P. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\frac{PA+PC}{PB+PD}=\frac{PD}{PC}.$$

5. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög köré írt kör AB ívének belső pontja P. Bizonyítsuk be, hogy a P pontnak a csúcsoktól mért távolságai között a következő összefüggés áll fenn:

$$PD+PE=PA+PB+PC+PF.$$

6. A k körben vegyünk fel egy AB húrt és az erre merőleges CD átmérőt, és írjunk bele két tetszőleges érintőkört! A k_1 érintési pontja legyen D, a k_2 kör pedig az ABC körszeletbe beírt legyen! Bizonyítsuk be, hogy a k_1 és k_2 körök közös külső érintőszakaszának hossza független a k_2 kör körszeletbeli helyzetétől!

IRODALOM

[1] HAJÓS GY.: *Bevezetés a geometriába.* Tankönyvkiadó, Bp. 1966.
[2] JAGLOM J. M.: *Geometricseszkije preobrazovanyija.* Gosztyechizdat, 1956.
[3] KOKSZETYER C. M.: *Vegyényie v geometriju.* Nauka, 1966.
[4] BAKOLMAN J. J.: *Inverszija.* Nauka. 1966.
[5] KAZARINOFF N. D.: *Geometriai egyenlőtlenségek.* Gondolat, 1980.
[6] RÉDLING E.: *Hasonlósági transzformációk.* Tankönyvkiadó, Bp. 1982.

BABOSS CSABA
főiskolai adjunktus
Erdészeti és Faipari Egyetem Földmérési és Földrendezői Főiskolai Kar,
Székesfehérvár

Kúpszeletek adott pontra illeszkedő érintőinek egyenletei

Ha egyenletével adott kúpszelet, adott $P_0(x_0; y_0)$ pontra illeszkedő érintőjének egyenletét szeretnénk meghatározni, akkor a következő három eset lehetséges:

1. az adott P_0 pont a kúpszeletnek belső pontja, ezért ilyen esetben nem létezik érintő,
2. a P_0 pont illeszkedik a görbére, ebben az esetben egy érintő lesz,
3. a görbének a P_0 pont ún. külső pontja, ilyenkor két érintőt kapunk (illetve hiperbolánál előfordulhat, hogy az egyik végérintő, azaz aszimptota).

1. Mindenekelőtt azt kell tehát eldöntenünk, hogy a kúpszelethez viszonyítva hol helyezkedik el az adott P_0 pont. Ezt könnyen megállapíthatjuk, ha vesszük a kúpszelet egyenletének nullára redukált alakját (úgy, hogy az ismert egyenletek jobb oldalán álló kifejezéseket kivonjuk mindkét oldalból), majd az így nyert egyenlet x, y változóinak helyébe behelyettesítjük a P_0 pont x_0, y_0 koordinátáit. Legyen a kapott helyettesítési érték D.

   Kör, ellipszis és parabola esetén a P_0 pont
   1. belső pont, ha $D<0$,
   2. görbén levő pont, ha $D=0$,
   3. külső pont, ha $D>0$.

   Hiperbolánál fordítva: $D>0$ esetén belső, $D<0$ esetén külső pont a P_0.

   Az előbbi megállapítások a kúpszeletek — mint mértani helyek — definíciójából következnek, egyébként könnyen igazolhatók.

2. *Ha a P_0 pont illeszkedik a görbére,* akkor az érintők egyenletei origó középpontú, illetve $K(u; v)$ középpontú görbéknél az alábbiak lesznek.

Kör érintői:

$$x_0x+y_0y=r^2, \quad \text{illetve} \quad (x_0-u)(x-u)+(y_0-v)(y-v)=r^2.$$

Ellipszis esetén:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1, \quad \text{illetve} \quad \frac{(x_0-u)(x-u)}{a^2}+\frac{(y_0-v)(y-v)}{b^2}=1.$$

Hiperbola esetén:

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1, \quad \text{illetve} \quad \frac{(x_0-u)(x-u)}{a^2}-\frac{(y_0-v)(y-v)}{b^2}=1.$$

Parabolánál:

a) ha a szimmetriatengely az y tengely vagy azzal párhuzamos:

$$x_0x=p(y_0+y), \quad \text{illetve} \quad (x_0-u)(x-u)=p(y_0+y-2v),$$

b) ha a szimmetriatengely az x tengely vagy azzal párhuzamos:

$$y_0y=p(x_0+x), \quad \text{illetve} \quad (y_0-v)(y-v)=p(x_0+x-2u).$$

Az itt leírt egyenletek könnyen memorizálhatók, mert minden esetben a megfelelő görbe egyenletéből úgy nyerhetők, hogy az egyenletben szereplő futókoordináták „egyikébe" beírjuk az érintési pont x_0, y_0 koordinátáit.

Például az utóbbi — az x tengellyel párhuzamos szimmetriatengelyű — parabola esetében ez a következőket jelenti:

A görbe egyenlete:

$$y^2=2px, \quad \text{illetve} \quad (y-v)^2=2p(x-u),$$

vagy másképpen írva:

$$yy=px+px, \quad \text{illetve} \quad (y-v)(y-v)=p(x-u)+p(x-u)$$

az egyik változó helyébe az érintési pont megfelelő koordinátáit írva:

$$y_0y=px_0+px, \quad \text{illetve} \quad (y_0-v)(y-v)=p(x_0-u)+p(x-u),$$

tehát az érintő egyenlete:

$$y_0y=p(x_0+x), \quad \text{illetve} \quad (y_0-v)(y-v)=p(x_0+x-2u).$$

Az előbb felsorolt érintők egyenleteinek levezetése Obádovics J. Gyula könnyen beszerezhető Matematika című könyvében megtalálható, ezért úgy gondoltam, hogy ezektől itt most eltekinthetünk. Az említett zsebkönyvben található, minden esetben azonos elvre épülő igazolásokat könnyen változatossá tehetjük, ha felhasználjuk az érintő meredekségének meghatározásához az analízisből ismert $m=f'(x_0)$ összefüggést, vagy az ellipszis esetében a kör és az ellipszis affin kapcsolatát.

3. *Ha a P_0 pont ún. külső pont,* akkor többnyire azt a gondolatot követjük, hogy felírjuk a $P_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő, ismeretlen meredekségű egyenessereg (sugársor) egyenletét — $y-y_0=m(x-x_0)$ — majd megvizsgáljuk, hogy mely „m" paraméter esetén lesz a kúpszelet és a sugársor egyenletéből álló másodfokú egyenletrendszernek egy megoldása. Tehát az „m" értékét a behelyettesítés után nyert paraméteres vegyes másodfokú egyenlet zérus diszkriminánsértékéből kapjuk.

Itt most elnézést kérek a Kedves Olvasótól, mert jól tudom, hogy eddig semmi újat nem írtam, csupán röviden összefoglaltam az ide vonatkozó ismereteket.

A következőkben a kúpszeletek, egy adott külső pontra illeszkedő érintői egyenletének más — talán kevésbé ismert — meghatározási módját szeretném ismertetni.

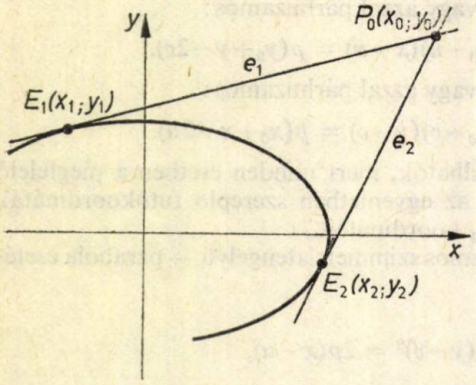
Vizsgáljuk meg, hogy ha — rossz diák módjára — külső pont esetén is használni próbáljuk a 2. pontban leírt érintő-egyenleteket, akkor minek az egyenletéhez jutunk?

(Az ugyanis nem lehet vitás, hogy ebben az esetben már nem az érintő egyenletét nyerjük.)

Konkrétan egy origó középpontú ellipszis esetében nézzük meg, hogy ha a $P_0(x_0; y_0)$ külső pont koordinátáit helyettesítjük az

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \qquad *$$

egyenletbe, akkor milyen egyenes tartozik ehhez az elsőfokú egyenlethez?



Legyen a P_0 pontból húzható, e_1 és e_2 érintők érintési pontja $E_1(x_1; y_1)$, illetve $E_2(x_2; y_2)$. Mivel ezek a pontok a görbén vannak, ezért az érintők egyenlete a 2. pontban leírtak alapján:

$$e_1: \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1,$$

$$e_2: \frac{x_2 x}{a^2} + \frac{y_2 y}{b^2} = 1.$$

A P_0 pont mindkét érintőnek pontja, ezért koordinátái kielégítik az előbbi egyenleteket, azaz

$$\frac{x_1 x_0}{a^2} + \frac{y_1 y_0}{b^2} = 1, \quad \text{illetve} \quad \frac{x_2 x_0}{a^2} + \frac{y_2 y_0}{b^2} = 1.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy az E_1 és E_2 érintési pontok koordinátái kielégítik a *-gal jelölt egyenletet, ezért a *kérdéses egyenlet nem lehet más, mint az E_1, E_2 érintési pontokon átmenő szelő egyenlete.*

Hasonló módon igazolható más görbék esetében is, hogy ha külső pont esetén használjuk a 2. pontban felsorolt érintő-egyenleteket, minden esetben a külső pontból húzható két érintő érintési pontjain átmenő szelő egyenletéhez jutunk. Bár erre a következtetésre az előbbiek alapján is eljuthatunk, mivel az igazolás során nem használtuk fel az ellipszis speciális tulajdonságait, hanem csak a görbe érintőjének egyenletét. Ezért a következtetés minden görbe esetében érvényes kell, hogy legyen.

Összefoglalva tehát egy P_0 külső pontra illeszkedő érintők egyenleteihez az alábbiak szerint is eljuthatunk:

a) Behelyettesítjük a külső pont koordinátáit a 2. pontban felsorolt, megfelelő érintő egyenletébe, ami most az érintési pontokon átmenő *szelő* egyenletét adja.

b) A görbe és a szelő egyenleteiből álló másodfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásával a két érintési pont koordinátáihoz jutunk. (Hiperbola esetében előfordulhat, hogy az egyenletrendszernek csak egy valós gyökpárja van. Ebben az esetben a P külső pont az egyik aszimptotára esik, tehát az egyik érintő végérintő.)

c) Az előbb kapott E_1, E_2 érintési pontok birtokában a 2. pontban található, megfelelő érintő egyenletét használva felírjuk a keresett érintők egyenleteit.

Végül egy konkrét feladaton keresztül vizsgáljuk meg a gyakorlatban a leírt eljárás alkalmazását!

Írjuk fel az $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ egyenletű hiperbola $P_0\left(\frac{16}{3};\ 4\right)$ pontra illeszkedő érintőinek egyenleteit!

1. Vizsgáljuk meg, hogy a P_0 pont a hiperbolához viszonyítva hol helyezkedik el!

   Az egyenlet nullára redukált alakja: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}-1=0$.

   Ennek a P_0 helyen vett függvényértéke: $D=-1<0$, tehát a P_0 pont külső pont, ezért két érintő lesz.

2. A szelő egyenlete: $\frac{\frac{16}{3}x}{16}-\frac{4y}{9}=1$,

   $$3x-4y=9.$$

3. Az érintési pontok (a hiperbola és a szelő metszéspontjai):
   A szelő egyenletéből az x változót kifejezve, majd a kapott értéket a hiperbola egyenletébe helyettesítve, egyszerűsítés után a következő másodfokú egyenletet nyerjük:

   $$\frac{y^2}{9}+\frac{8y+9}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow y=\frac{7}{8},\quad x=\frac{25}{6}.$$

   Tehát $E_1\left(\frac{25}{6};\ \frac{7}{8}\right)$.

4. Az érintők egyenletei: $e_1: \frac{25x}{96}-\frac{7y}{72}=1$.

   Mivel külső pont esetén csak egy érintési pontot nyertünk, ezért a P_0 pont rajta van az egyik aszimptotán. Ez az aszimptota, azaz végérintő (végtelen távoli érintési ponttal) az $y=\frac{3}{4}x$ egyenletű egyenes.

FIALÁNÉ DÉR ZSUZSA—LUKÁCS OTTÓ
főiskolai adjunktus főiskolai docens
Bánki Donát Gépipari Műszaki Főiskola, Budapest

Egyenlőtlenségek számítógépes megoldásának tanítása

Bevezetés

Egyenlőtlenségeket megoldani általában nem túl nehéz feladat. *Paraméteres egyenlőtlenségek megoldása* (amikor az együtthatók paraméterek) azonban már összetettebb probléma. A megoldás a paraméterek (együtthatók) függvénye, *diszkutálni* kell a különböző eseteket, minden eshetőségre kitérve.

A *számítógép* számára is így, paraméteres formában érdemes megadni a programot, hiszen ezáltal egyetlen programmal bármely lehetséges paraméterértékre a gép kiszámítja és kiírja az egyenlőtlenség megoldását. Ily módon a diák is hasznosnak látja, hogy *tömérdek egyenlőtlenséget tud egyetlen programmal kezelni.*

A jelen cikkben *két példát* mutatunk két paraméteres egyenlőtlenség-típus megoldására. A *folyamatábra* bármely gép számára rögzíti az algoritmust, a BASIC nyelvű *programot* COMMODORE—64-re írtuk és futtattuk.

Lineáris kifejezést tartalmazó törtes egyenlőtlenség megoldása

A következő feladatban azt szeretnénk bemutatni, hogy sok esetben egy-egy folyamatábra mennyivel áttekinthetőbbé teszi a munkát, mint ha a logikai eseteket különkülön adjuk meg. A feladat: mely x-ekre teljesül az

$$\boxed{\frac{ax+b}{cx+d} \leqq 0}$$

egyenlőtlenség? (b és d tetszőleges valós szám, a és c 0-tól különböző valós szám.)

Egy tört akkor negatív, ha a számlálója és nevezője különböző előjelűek. Az alábbi lineáris egyenlőtlenség-rendszereket kell tehát megoldani:

$$\begin{array}{lll} ax+b \geqq 0, & & ax+b \leqq 0, \\ \text{I. vagy} & & \text{II.} \\ cx+d < 0, & & cx+d > 0. \end{array}$$

Oldjuk meg az egyenlőtlenség-rendszereket (kísérjük rajzzal!), foglaljuk táblázatba a megoldást. Attól függően, hogy

1. $-\frac{b}{a}$ és $-\frac{d}{c}$ egymáshoz viszonyítva milyen nagyságúak,
2. a és c egymáshoz viszonyítva milyen előjelűek, a következőképpen alakul a megoldás.

$\frac{b}{a}$ és $\frac{d}{c}$ nagysági viszonya	az I. egyenlőtlenség-redszer megoldása	a II. egyenlőtlenség-rendszer megoldása	$\frac{a}{c}$ előjele
$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}<0$	nincs megoldás vagy	$-\frac{d}{c} < x \leqq -\frac{b}{a}$ megoldás	$\frac{+}{+}$
	$x \geqq -\frac{b}{a}$ vagy	$x < -\frac{d}{c}$	$\frac{+}{-}$
	$x < -\frac{d}{c}$ vagy	$x \geqq -\frac{b}{a}$	$\frac{-}{+}$
A)	$-\frac{d}{c} < x \leqq -\frac{b}{a}$ vagy	nincs megoldás	$\frac{-}{-}$
$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=0$	nincs megoldás vagy	nincs megoldás	$\frac{+}{+}$
	$x > -\frac{d}{c}$ vagy	$x < -\frac{d}{c}$	$\frac{+}{-}$
	$x > -\frac{d}{c}$ vagy	$x < -\frac{d}{c}$	$\frac{-}{+}$
B)	nincs megoldás vagy	nincs megoldás	$\frac{-}{-}$

$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}>0$	$-\frac{b}{a} \leqq x<-\frac{d}{c}$	vagy	nincs megoldás	$\frac{+}{+}$
	$x>-\frac{d}{c}$	vagy	$x \leqq -\frac{b}{a}$	$\frac{+}{-}$
	$x \leqq -\frac{b}{a}$	vagy	$x>-\frac{d}{c}$	$\frac{-}{+}$
C)	nincs megoldás	vagy	$-\frac{b}{a} \leqq x<-\frac{d}{c}$	$\frac{-}{-}$

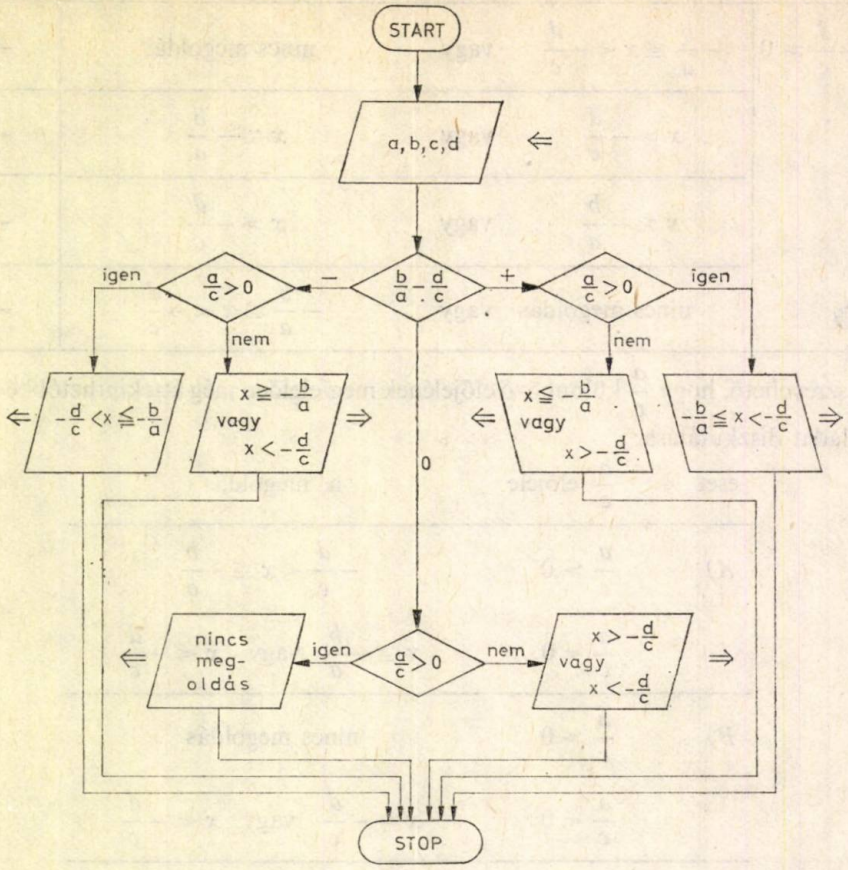
Észrevehető, hogy $\frac{a}{c}$ különböző előjelének megfelelően még áttekinthetőbbé tehető a feladat diszkutálása:

eset	$\frac{a}{c}$ előjele	a megoldás
A)	$\frac{a}{c}>0$	$-\frac{d}{c}<x \leqq -\frac{b}{a}$
	$\frac{a}{c}<0$	$x \geqq -\frac{b}{a}$ vagy $x<-\frac{d}{c}$
B)	$\frac{a}{c}>0$	nincs megoldás
	$\frac{a}{c}<0$	$x>-\frac{d}{c}$ vagy $x<-\frac{d}{c}$
C)	$\frac{a}{c}>0$	$-\frac{b}{a} \leqq x<-\frac{d}{c}$
	$\frac{a}{c}<0$	$x \leqq -\frac{b}{a}$ vagy $x>-\frac{d}{c}$

A paraméteres, lineáris egyenlőtlenség-rendszer megoldását még áttekinthetőbbé teszi az 1. folyamatábra.

A program:

```
1Ø  REM LIN.KIF.TART.TORTES EGYENLOTLENSEG
2Ø  INPUT "MI AZ A,B,C,D EGYUTTH.ERTEKE"; A,B,C,D
3Ø  ON SGN (B/A-D/C)+2 GOTO 1ØØ, 2ØØ, 3ØØ
1ØØ IF A/C>Ø THEN PRINT-D/C;"<X<="; -B/A:GOTO 4ØØ
11Ø PRINT "X>="; -B/A: "VAGY X<"; -D/C:GOTO 4ØØ
2ØØ IF A/C>Ø THEN PRINT "NINCS MEGOLDAS":GOTO 4ØØ
21Ø PRINT "X>"; -D/C; "VAGY X<"; -D/C:GOTO 4ØØ
3ØØ IF A/C>Ø THEN PRINT -B/A; "<=X<"; -D/C: GOTO 4ØØ
31Ø PRINT "X<="; -B/A; "VAGY X>"; -D/C
4ØØ END
```



1. ábra. $\frac{ax+b}{cx+d} \leqq 0$ megoldása, ha $a \neq 0, c \neq 0$

Magyarázat a 30-as sorhoz:

$$\mathrm{SGN(Z)} = \begin{cases} -1, & \text{ha } Z < 0, \\ 0, & \text{ha } Z = 0, \\ +1, & \text{ha } Z > 0. \end{cases}$$

Az ON Z GOTO... („Z értékétől függően menj a ... utasításra") csak akkor működik, ha Z=1,2,3,.... Ezért adtunk SGN(B/A−D/C)-hez 2-t.

Javasoljuk az Olvasónak, hogy írjon fel 6 olyan egyenlőtlenséget, amelyeknek számítógépes megoldatásával kipróbálhatja a programnak mind a 6 ágát.

Másodfokú egyenlőtlenségek megoldása

Az $ax^2+bx+c>0$ egyenlőtlenség megoldása ($a \neq 0$) a

$$D = b^2-4ac$$

diszkrimináns előjelétől függ. Ha

a) $D<0$, akkor az

$$y = ax^2+bx+c$$

egyenletű parabola $a>0$ esetén egyenes állású, nem metszi és nem is érinti az x tengelyt, minden valós x-re $y>0$ teljesül *(2. ábra, l. a borítón)*. Az $a<0$ esetben viszont $y<0$ minden valós x-re, tehát ilyenkor nincs megoldás. Ha

b) $D=0$, akkor a parabolának az x tengellyel 1 közös pontja van $x=\frac{-b}{2a}$ abszcisszánál. Az $a>0$ esetben $x=\frac{-b}{2a}$-t kivéve minden valós x-re $y>0$, az $a<0$ esetben nincs pozitív ordinátájú parabola-pont. Ha

c) $D>0$, akkor az $a>0$ esetben a parabola-pontok ordinátái pozitívak az

$$x < x_1 \quad \text{vagy} \quad x > x_2$$

esetben (x_1 a kisebb gyök); az $a<0$ esetben

$$x_1 < x < x_2$$

a megoldás.

A program tehát D-től függően háromfelé ágazik el. Megoldhatjuk a feladatot két IF-fel (IF $D<0$, IF $D=0$) vagy a már ismertetett

ON SGN(D)+2 GOTO...

utasítással. Az utóbbit választjuk.

```
10  REM MASODFOKU EGYENLOTLENSEG
20  PRINT "KEREM A,B,C ERTEKET!"
30  INPUT "A="; A: INPUT "B="; B: INPUT "C=";C
40  IF A=0 THEN PRINT "NEM MASODFOKU AZ EGYENLOTLENSEG, KEREK UJ
EGYUTTHATOKAT!"
45  D=B↑2—4*A*C
50  ON SGN(D)+2 GOTO 100, 150, 200
100 IF A>0 THEN PRINT "MINDEN VALOS X MEGOLDAS": GOTO 1000
110 PRINT "NINCS MEGOLDAS":GOTO 1000
150 IF A>0 THEN PRINT "X>"; —B/(2*A); "VAGY X<"; —B/(2*A):GOTO 1000
160 PRINT "NINCS MEGOLDAS":GOTO 1000
200 IF A>0 THEN GOSUB 2000:PRINT "X<";X1; "VAGY X>";X2:GOTO 1000
210 GOSUB 2000: PRINT X1;"<X<";X2
1000 END
2000 REM X1<X2
2010 X1=(—B+SQR(B↑2—4*A*C))/(2*A)
2020 X2=(—B—SQR(B↑2—4*A*C))/(2*A)
2030 IF X1>X2 THEN S=X1:X1—X2:X2=S
2040 RETURN
```

Magyarázat a 2000 címkével kezdődő szubrutinhoz: X1 és X2 kiszámítása után elemcserével el kell érnünk, hogy X1 legyen a kisebbik gyök.

Mintapéldák a program egyes ágainak a kipróbálására:

$x^2+4>0$, minden valós x megoldás,
$-x^2-4>0$, nincs megoldás,
$x^2+2x+1>0$, $x>-1$ vagy $x<-1$,
$-x^2-2x-1>0$, nincs megoldás,
$x^2-5x+6>0$, $x<2$ vagy $x>3$ ($x_1=2$, $x_2=3$),
$-x^2+5x-6>0$, $2<x<3$ ($x_1=2$, $x_2=3$).

BENCZE MIHÁLY
tanár
Brassó

Egyenlőtlenségek a háromszögben

Cikkünkben néhány háromszögbeli egyenlőtlenséggel foglalkozunk.

Jelölések. A, B, C a háromszög szögei radiánban; a, b, c az odalai; p a félkerület; R, illetve r a háromszög köré, illetve a háromszögbe írt kör sugarai; r_a, r_b, r_c a háromszöghöz írt körök sugarai; m_a, m_b, m_c az a, b, c oldalakhoz tartozó súlyvonalak hossza; f_a, f_b, f_c az a, b, c oldalakhoz tartozó szögfelezők hossza; O a háromszög köré írt kör középpontja; I a háromszögbe írt kör középpontja; T a háromszög területe.

1. §

Tétel 1. Bármely $x\in(0, \pi/2)$ esetén igazak a következő egyenlőtlenségek: $2x/\pi < \sin x < x$ és $x/2 < \operatorname{tg}(x/2) < 2x/\pi$.

Bizonyítás. A $\sin x < x$ egyenlőtlenség azonnal következik a $\sin x$ függvény Taylor-féle sorbafejtéséből. Legyen $f(x)=\frac{1}{x}\sin x$, akkor $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$, ahol $g(x)=x\cos x-\sin x$ és $g(0)=0$, $g'(x)=-x\sin x<0$. Következik, hogy f csökkenő, azaz $f(x)>f(\pi/2)$, innen pedig $\sin x>2x/\pi$. Legyen $h(x)=\frac{1}{x}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, akkor a deriváltja $h'(x)=(x-\sin x)/\left(2x^2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)>0$, azaz h növekvő, és ezért $h(0)<h(x)<h(\pi/2)$, innen pedig $\frac{1}{2}<\frac{1}{x}\operatorname{tg}\frac{x}{2}<\frac{2}{\pi}$, ahonnan a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk.

Alkalmazás 1.1. Tetszőleges hegyesszögű háromszögben igazak a következő egyenlőtlenségek:

$$\frac{p\pi}{4R} < \sum A\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) < \frac{p}{R}.$$

Bizonyítás.

$$\sum A\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) < \sum 2\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right)\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \sum \sin A = \frac{p}{R} < \frac{4}{\pi}\sum A\cos^2\left(\frac{A}{2}\right),$$

innen következik az állítás.

Alkalmazás 1.2. Legyen $f_u(x)=1-(x/u)^2$. Igazoljuk, hogy tetszőleges hegyesszögű háromszögben

$$\sum f_{\pi/2}(A)\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) < 1+\frac{r}{R} < \sum f_2(A)\cos^2\left(\frac{A}{2}\right).$$

Bizonyítás.

$$1+\frac{r}{R} = \sum\cos A = \sum\left(1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right)\right)\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) < \sum\left(1-\frac{A^2}{4}\right)\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) =$$

$$= \sum f_2(A)\cos^2(A/2),$$

de

$$\sum\left(\left(1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right)\right)\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)>\sum\left(1-\frac{4A^2}{\pi^2}\right)\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)=\sum f_{\pi/2}(A)\cos^2\left(\frac{A}{2}\right),\right.$$

és ezzel az állítást igazoltuk.

Megjegyzés. Továbbra is nyitott kérdés marad mindazoknak az u és v valós számoknak a meghatározása, amelyekre a $\sum f_u(A)\cos^2(A/2)<1+\frac{r}{R}<\sum f_v(A)\cos^2(A/2)$ egyenlőtlenség-lánc a lehető legjobb.

Alkalmazás 1.3. Igazoljuk, hogy tetszőleges hegyesszögű háromszögben

$$\sum f_{\pi/2}(A)<\frac{p}{2R}<\sum g_{\pi/2}(A), \quad \text{ahol} \quad f_u(x)=\frac{u^2x}{2(u^2+x^2)},$$

valamint

$$g_v(x)=\frac{4x}{v(4+x^2)}.$$

(Mathematics Magazine 1236-os feladata.)

Bizonyítás.

$$\frac{p}{2R}=\sum\frac{\operatorname{tg}(A/2)}{1+\operatorname{tg}^2(A/2)}>\sum\frac{\operatorname{tg}(A/2)}{1+4A^2/\pi^2}>\sum\frac{A/2}{1+4A^2/\pi^2}=\sum f_{\pi/2}(A),$$

de

$$\sum\frac{\operatorname{tg}(A/2)}{1+\operatorname{tg}^2(A/2)}<\sum\frac{\operatorname{tg}(A/2)}{1+A^2/4}<\sum\frac{2A/\pi}{1+A^2/4}=\sum g_{\pi/2}(A),$$

és ezzel az állítást bizonyítottuk.

Megjegyzés. Továbbra is nyitott kérdés marad mindazoknak az u és v valós számoknak a meghatározása, amelyekre $\sum f_u(A)<\frac{p}{2R}<\sum g_v(A)$ egyenlőtlenség-lánc a lehető legjobb.

Alkalmazás 1.4. Legyen $f_u(x)=\frac{u^2-x^2}{u^2+x^2}$. Igazoljuk, hogy tetszőleges hegyesszögű háromszögben

$$\sum f_{\pi/2}(A)<1+\frac{r}{R}<\sum f_2(A).$$

Bizonyítás.

$$\sum f_{\pi/2}(A)=\sum\frac{1-4A^2/\pi^2}{1+4A^2/\pi^2}<\sum\frac{1-\operatorname{tg}^2(A/2)}{1+4A^2/\pi^2}<\sum\frac{1-\operatorname{tg}^2(A/2)}{1+\operatorname{tg}^2(A/2)}=$$

$$=1+\frac{r}{R}<\sum\frac{1-\operatorname{tg}^2(A/2)}{1+A^2/4}<\sum\frac{1-A^2/4}{1+A^2/4}=\sum f_2(A).$$

Megjegyzés. Továbbra is nyitott kérdés marad mindazoknak az u és v valós számoknak a meghatározása, amelyekre a $\sum f_u(A)<1+\frac{r}{R}<\sum f_v(A)$ egyenlőtlenség-lánc a lehető legjobb.

Alkalmazás 1.5. Az előző alkalmazás jelölésével igazoljuk, hogy tetszőleges hegyesszögű háromszögben

$$\sum a f_{\pi/2}(A) < \frac{2T}{R} < \sum a f_2(A).$$

Bizonyítás. Kiindulunk a

$$\frac{2T}{R} = \sum a \cos A = \sum a \left(1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right)\right) \Big/ \left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right)\right)$$

azonosságból, és az előző alkalmazásbeli egyenlőtlenségeket használjuk.

Megjegyzés. Továbbra is nyitott kérdés mindazoknak az u és v valós számoknak a meghatározása, amelyekre a

$$\sum a f_u(A) < \frac{2T}{R} < \sum a f_v(A)$$

egyenlőtlenség-lánc a lehető legjobb.

Alkalmazás 1.6. Tetszőleges hegyesszögű háromszögben

$$\pi(2R - r) < \sum aA < 4(2R - r).$$

(Matematikai Lapok 3/1983, Kolozsvár-Napoca C 340-es feladata.)

Bizonyítás.

$$4R + r = \sum r_a = \sum \left(r + a \operatorname{tg}(A/2)\right) < 3r + \frac{2}{\pi} \sum aA,$$

de

$$\sum \left(r + a \operatorname{tg}(A/2)\right) > 3r + \frac{1}{2} \sum aA,$$

innen pedig a kívánt egyenlőtlenségeket kapjuk.

Alkalmazás 1.7. Tetszőleges hegyesszögű háromszögben

$$\pi r \sum \frac{a}{b + c - a} < \sum aA < 4r \sum \frac{a}{b + c - a}.$$

Bizonyítás.

$$\sum a \frac{A}{2} < \sum a \operatorname{tg}(A/2) = \sum \frac{a2r}{b + c - a} < \sum \frac{2aA}{\pi},$$

innen következik az állítás.

Alkalmazás 1.8. Tetszőleges hegyesszögű háromszögben

$$\frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{R} < \sum aA < 4T \sum \frac{a}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

Bizonyítás.

$$\frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{R} = \sum a \sin A < \sum aA < \sum a \operatorname{tg} A = 4T \sum \frac{a}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

Alkalmazás 1.9. Tetszőleges hegyesszögű háromszögben

$$2p\pi - 8(R + r) < \sum aA < 2\pi(p - R - r).$$

Bizonyítás.

$$\sum \frac{a(\pi - A)}{2} = \sum \frac{a(B + C)}{2} < \sum a \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}\right) = \sum \frac{a^2}{r_a} =$$

$$= 4(R+r) < \sum \frac{2a(B+C)}{\pi} = \sum \frac{2a(\pi-A)}{\pi}.$$

Alkalmazás 1.10. Tetszőleges hegyesszögű háromszögben

$$\pi < \sum \frac{a}{r_a} < 4.$$

Bizonyítás.

$$\sum \frac{1}{2}(B+C) < \sum \left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) = \sum \frac{a}{r_a} < \sum \frac{2(B+C)}{\pi}.$$

Alkalmazás 1.11. Tetszőleges hegyesszögű háromszögben

$$\frac{3p}{2} < \sum \frac{r_a}{A} < \frac{6p}{\pi}.$$

Bizonyítás.

$$\frac{\pi}{2}\sum \frac{r_a}{A} < \sum r_a \operatorname{ctg}\frac{A}{2} = 3p < 2\sum \frac{r_a}{A}.$$

Alkalmazás 1.12. Tetszőleges hegyesszögű háromszögben

$$\frac{R\pi^3}{2p} < \prod (A+B) < \frac{32R}{p}.$$

Bizonyítás.

$$\prod \frac{2(A+B)p}{\pi} > \prod p\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right) = \prod (r_a+r_b) = 4rp^2 > \prod \frac{p(A+B)}{2}.$$

Alkalmazás 1.13. Tetszőleges hegyesszögű háromszögben

$$\frac{8}{\pi^2} < \sum \frac{\cos A}{BC} < 2.$$

Bizonyítás.

$$\sum \frac{\cos A}{BC} < 2 = \sum \frac{\cos A}{\sin B \sin C} < \frac{\pi^2}{4}\sum \frac{\cos A}{BC}.$$

Alkalmazás 1.14. Tetszőleges hegyesszögű háromszögben

$$\frac{3T}{R} < \sum aBC < \frac{3T\pi^2}{4R}.$$

Bizonyítás.

$$\frac{8R}{\pi^2}\sum aBC < \sum 2aR \sin B \sin C = \sum ah_a = 6T < 2R\sum aBC.$$

(h_a jelöli a háromszög a oldalához tartozó magasságot.)

Alkalmazás 1.15. Tetszőleges hegyesszögű háromszögben

$$\frac{p\pi}{2} < 4R+r < 2p.$$

Bizonyítás.

$$\frac{p\pi}{2} = \sum p\frac{A}{2} < \sum p \operatorname{tg}(A/2) = \sum r_a = 4R+r < \sum p\frac{2A}{\pi} = 2p.$$

Alkalmazás 1.16. Tetszőleges hegyesszögű háromszögben

$$\frac{\pi}{4r} < \sum \frac{1}{-a+b+c} < \frac{1}{r}.$$

(Matematikai Lapok 3/1985, 20 377-es feladata.)

Bizonyítás.

$$\sum \frac{1}{2}A < \sum \operatorname{tg}(A/2) = \sum \frac{r}{p-a} < \sum \frac{2A}{\pi}.$$

Alkalmazás 1.17. Tetszőleges háromszögben

$$4 < \sum \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) f_a < 2\pi.$$

(Matematikai Lapok 1/1986 C 552-es feladata.)

Bizonyítás.

$$\sum \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right) < \sum \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) f_a = \sum \cos(A/2) = \sum \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right) < \sum \left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right).$$

2. §

Tétel 2. (BALLIEU [1]). Ha $0<t\leqq 1$, akkor tetszőleges háromszögben

$$2^{t-1}\sin^t(A/2) \leqq a^t/(b^t+c^t).$$

Bizonyítás. A $\sin^t x$ függvény (alulról) konkáv a $[0, \pi]$ intervallumban, ezért a Jensen-egyenlőtlenségből $\sin^t B+\sin^t C \leqq 2\sin^t\left(\frac{B+C}{2}\right)=2\cos^t(A/2)$. Beszorozva az így kapott egyenlőtlenség mindkét oldalát $2^{t-1}\sin^t(A/2)$-vel, a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk.

Alkalmazás 2.1. Tetszőleges háromszögben

$$\sum \operatorname{cosec}^{nt}(A/2) \geqq 3\cdot 2^{nt}, \text{ ahol } 0<t\leqq 1 \text{ és } n \text{ természetes szám.}$$

Bizonyítás.

$$\sum \operatorname{cosec}^{nt}(A/2) \geqq 2^{n(t-1)} \sum \frac{(b^t+c^t)^n}{a^{nt}} \geqq 2^{n(t-1)} \sum \frac{2^n\left(\sqrt{b^t c^t}\right)^n}{a^{nt}} \geqq 3\cdot 2^{nt}.$$

Megjegyzés. Ha $t=1$, akkor [6] cikke (5)-ös egyenlőtlenségének egy általánosítását kapjuk. Ha $n=1$, akkor J. M. CHILD [3] és M. S. KLAMKIN [4] egyenlőtlenségeinek egy általánosítását kapjuk. Ha $n=2$, akkor R. KOISTRA [5] egyenlőtlenségének egy általánosítását kapjuk.

Alkalmazás 2.2. Tetszőleges háromszögben

$$\sum \operatorname{cosec}^{nt}(A/2)\operatorname{cosec}^{nt}(B/2) \geqq 3\cdot 4^{nt}, \quad \text{ahol} \quad 0<t\leqq 1 \quad \text{és} \quad n\in\mathbf{N}.$$

Bizonyítás. Az előbbi alkalmazás bizonyítási módszerét alkalmazzuk.

Megjegyzés. Ha $n=1$, akkor J. M. CHILD [3] egy másik egyenlőtlenségének az általánosítását kapjuk.

Alkalmazás 2.3. Tetszőleges háromszögben

$$2^t(-1+\sum \cos A)^t \leqq \frac{8a^t b^t c^t}{(a^t+b^t)(b^t+c^t)(c^t+a^t)}, \quad \text{ahol} \quad 0<t\leqq 1.$$

Bizonyítás. Kiindulunk a $-1+\sum \cos A=4\prod \sin(A/2)$ azonosságból. t-edik hatványra emeljük és a jobb oldalon alkalmazzuk a tételbeli egyenlőtlenséget, valamint permutáltjait.

Megjegyzés. Ha $t=1$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\sum \cos A \leqq 1+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

alkalmazva az $(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 8abc$ Cèsaro-féle egyenlőtlenséget az ismert $\sum \cos A\leqq 3/2$ egyenlőtlenséget kapjuk. Állításunk ennél élesebb.

Alkalmazás 2.4. Tetszőleges háromszögben

$$\left(\frac{2r}{R}\right)^t \leqq \frac{8a^t b^t c^t}{(a^t+b^t)(b^t+c^t)(c^t+a^t)}, \quad \text{ahol} \quad 0<t\leqq 1.$$

Bizonyítás. Kiindulunk a $\frac{r}{4R}=\prod \sin(A/2)$ azonosságból és a tételbeli egyenlőtlenségeket alkalmazzuk.

Megjegyzés. Az előbbi megjegyzés értelmében alkalmazásunk az ismert $R\geqq 2r$ Euler-féle egyenlőtlenség egy élesítése.

Alkalmazás 2.5. Tetszőleges háromszögben

$$(R^2-OI^2)^t \leqq \frac{8a^t b^t c^t}{(a^t+b^t)(b^t+c^t)(c^t+a^t)} R^{2t}, \quad \text{ahol} \quad 0<t\leqq 1.$$

Bizonyítás. Kiindulunk az $R^2-OI^2=8R^2\prod \sin(A/2)$ azonosságból.

Megjegyzés. Az e paragrafusunkban szereplő egyenlőtlenségekben az egyenlő oldalú háromszög esetén áll fenn az egyenlőség.

3. §

Tétel 3. Tetszőleges hegyesszögű háromszögben

$$2^{t-1}\cos^t(A/2) \leqq \frac{\sin^t A}{\cos^t B+\cos^t C}, \quad \text{ahol} \quad 0<t\leqq 1.$$

Bizonyítás. A $\cos^t x$ (alulról) konkáv függvény a $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban, ezért a Jensen-egyenlőtlenség miatt

$$\cos^t B+\cos^t C \leqq 2\cos^t\left(\frac{B+C}{2}\right)=2\sin^t(A/2),$$

innen pedig következik a tétel egyenlőtlensége.

Alkalmazás 3.1. Tetszőleges hegyesszögű háromszögben

$$\sum \sec^{nt}(A/2) \geqq 3\cdot 2^{nt}\prod \operatorname{ctg}^{nt} A, \quad \text{ahol} \quad 0<t\leqq 1 \quad \text{és} \quad n\in\mathbf{N}.$$

Bizonyítás.

$$\sum \sec^{nt}(A/2) \geqq 2^{n(t-1)} \sum \frac{(\cos^t B+\cos^t C)^n}{\sin^{nt} A} \geqq$$

$$\geqq 2^{nt} \sum \left(\frac{\sqrt{\cos^t B\cos^t C}}{\sin^t A}\right)^n \geqq 3\cdot 2^{nt}\prod \operatorname{ctg}^{nt} A.$$

Alkalmazás 3.2. Tetszőleges hegyesszögű háromszögben

$$\sum \sec^{nt}(A/2)\sec^{nt}(B/2) \geqq 3\cdot 4^{nt}\prod \operatorname{ctg}^{2nt} A, \quad \text{ahol} \quad 0 < t \leqq 1 \quad \text{és} \quad n\in\mathbf{N}.$$

Bizonyítás. Ugyanaz, mint az előbbi bizonyítás gondolatmenete.

Alkalmazás 3.3. Tetszőleges hegyesszögű háromszögben

$$2^t\left(\sum \sin A\right)^t \leqq 8\prod \frac{\sin^t A}{\cos^t B+\cos^t C}, \quad \text{ahol} \quad 0 < t \leqq 1.$$

Bizonyítás. Kiindulunk a $\sum \sin A = 4\prod \cos(A/2)$ azonosságból.

Alkalmazás 3.4. Tetszőleges hegyesszögű háromszögben

$$\left(\frac{-a+b+c}{R}\right)^t \leqq 8\,\frac{\sin^t A \sin^t B \sin^t C}{(\cos^t A+\cos^t B)(\sin^t B+\sin^t C)(\sin^t C+\sin^t A)},$$

valamint ezeknek az egyenlőtlenségeknek a permutáltjai, ahol $0<t\leqq 1$,

Bizonyítás. Kiindulunk a $\frac{p-a}{4R}=\cos(A/2)\sin(B/2)\sin(C/2)$ azonosságból.

Megjegyzés. Tetszőleges háromszögben $\cos(A/2)\leqq\frac{\sin A}{\cos B+\cos C}$.

Bizonyítás. Kiindulunk a $\cos(A/2)\leqq\frac{\sin A}{\cos B+\cos C}$ egyenlőtlenség $\cos(A/2)\leqq$ $\leqq\frac{a}{(b+c)\operatorname{tg}(A/2)}$ ekvivalens átírásából, ahonnan a $\sin(A/2)\leqq\frac{a}{b+c}$ egyenlőtlenséget kapjuk, amely tetszőleges háromszögben igaz. Ezek szerint az ebben a paragrafusban szereplő egyenlőtlenségek $t=1$ esetén tetszőleges háromszögekben is érvényesek. Nyitott kérdés marad annak az eldöntése, hogy $0<t<1$ esetén a fenti egyenlőtlenségek közül melyek teljesülnek általános háromszögekben.

A fenti egyenlőtlenségekben az egyenlő oldalú háromszög esetén áll fenn az egyenlőség.

4. §

Tétel 4. Tetszőleges háromszögben teljesülnek a következő egyenlőtlenségek: $m_a^2\geqq p(p-a)\geqq f_a^2$ és $\frac{bc}{2R}\leqq f_a\leqq 2R\cos^2(A/2)$, valamint a permutáltjaik.

Bizonyítás.

$$m_a^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)=p(p-a)+\frac{1}{4}(b-c)^2\geqq p(p-a)\geqq\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}=f_a^2,$$

de

$$f_a=\frac{2bc}{b+c}\cos(A/2)\leqq\frac{2bc}{b+c}\cdot\frac{a\operatorname{ctg}(A/2)}{(b+c)^2}\leqq\frac{1}{2}a\operatorname{ctg}(A/2),$$

innen pedig $f_a\leqq 2R\cos^2(A/2)$. De $\cos(A/2)\geqq\frac{1}{2}(\sin B+\sin C)$, azaz $\cos(A/2)\geqq$ $\geqq\frac{b+c}{4R}$ és ezzel $f_a=\frac{2bc}{b+c}\cos(A/2)\geqq\frac{bc}{2R}$. Q. E. D.

Alkalmazás 4.1. Tetszőleges háromszögben

$$\prod(m_a+f_a)\geqq\max\left\{2\left(\prod f_a+\sum m_a m_b f_c\right);\,2\left(\prod f_a+\sum m_a f_b f_c\right);\,\left(\sqrt[3]{\prod m_a}+\sqrt[3]{\prod f_a}\right)^3\right\}.$$

Bizonyítás. Alkalmazva a tételt következik, hogy $x_1=m_a/f_a\geqq 1$, $x_2=m_b/f_b\geqq 1$, $x_3=m_c/f_c\geqq 1$. De $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\geqq 2(1+x_1+x_2+x_3)$ V. Brun és G. Arfwedson egyenlőtlensége értelmében, és felhasználva a helyettesítést azt kapjuk, hogy $\prod(m_a+f_a)\geqq 2(\prod f_a+\sum m_a f_b f_c)$. Könnyen igazolható, hogy $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\geqq$ $\geqq 2(1+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$. Behelyettesítés után $\prod(m_a+f_a)\geqq 2(\prod f_a+\sum m_a m_b f_c)$. Felhasználva az $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\geqq\left(1+\sqrt[3]{x_1x_2x_3}\right)^3$ egyenlőtlenséget a behelyettesítés után $\prod(m_a+f_a)\geqq\left(\sqrt[3]{\prod m_a}+\sqrt[3]{\prod f_a}\right)^3$. Ezekből következik az állítás.

Alkalmazás 4.2. Tetszőleges háromszögben

$$\sum m_a m_b f_c+3\prod f_a\geqq 2\sum m_a f_b f_c.$$

Bizonyítás. Kimutatjuk, hogy az előbbi jelölések mellett teljesül az $x_1x_2+x_2x_3+$ $+x_3x_1+3\geqq 2(x_1+x_2+x_3)$ egyenlőtlenség.

Alkalmazás 4.3. Ha $1<p\leqq 2$ és $q(p-1)=p$, akkor tetszőleges háromszögben

$$\sum(m_a+f_a)^q+\sum(m_a-f_a)^q\leqq 2\sum m_a^{q-p}(m_a^p+f_a^p)^{1/(p-1)}.$$

Bizonyítás. Legyen $y_1=f_a/m_a\leqq 1$, $y_2=f_b/m_b\leqq 1$ és $y_3=f_c/m_c\leqq 1$. Alkalmazzuk Clarkson első egyenlőtlenségét, amelynek értelmében $(1+y_k)^q+(1-y_k)^q\leqq 2(1+y_k^p)^{1/(p-1)}$, ahol $k=1, 2, 3$. Összeadva a megfelelő oldalakat és elvégezve a helyettesítést a kívánt eredményt kapjuk.

Alkalmazás 4.4. Ha $p\geqq 2$, akkor tetszőleges háromszögben

$$\sum(m_a+f_a)^p+\sum(m_a-f_a)^p\leqq 2^{p-1}\left(\sum m_a^p+\sum f_a^p\right).$$

Bizonyítás. Az előbbi jelölések mellett Clarkson második egyenlőtlenségéből $(1+y_k)^p+(1-y_k)^p\leqq 2^{p-1}(1+y_k^p)$, ahol $k=1, 2, 3$. Adjuk össze a megfelelő oldalakat és alkalmazzuk a helyettesítést!

Alkalmazás 4.5. Tetszőleges háromszögben

$$\prod(m_a+f_a)+\prod(m_a-f_a)\leqq 2\left(\prod m_a\right)\left(1+\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\sum f_a/m_a\right)^{3/2}\right)^2.$$

Bizonyítás.

$$\prod(1+y_1)\leqq(1+u)^3\quad\text{és}\quad\prod(1-y_1)\leqq(1-u)^3,\quad\text{ahol}\quad u=\frac{1}{3}\left(\sum y_1\right).$$

Összeadva a két egyenlőtlenség megfelelő oldalait és alkalmazva Clarkson második egyenlőtlenségét a következőt kapjuk:

$$\prod(1+y_1)+\prod(1-y_1)\leqq(1+u)^3+(1-u)^3\leqq 2(1+u^{3/2})^2,$$

ahonnan behelyettesítés után az eredményhez jutunk.

Alkalmazás 4.6. Ha $n\geqq 2/3$, akkor tetszőleges háromszögben,

$$\prod(m_a+f_a)^n+\prod(m_a-f_a)^n\leqq 2^{3n-1}\left(\prod m_a^n\right)\left(1+3^{-3n}\left(\sum f_a/m_a\right)^{3n}\right).$$

Bizonyítás. Az előbbi bizonyítás gondolatmenetét felhasználva és alkalmazva a Clarkson egyenlőtlenségét.

$$\prod(1+y_1)^n+\prod(1-y_1)^n\leqq(1+u)^{3n}+(1-u)^{3n}\leqq 2^{3n-1}(1+u^{3n}),$$

behelyettesítés után az állítást kapjuk.

Alkalmazás 4.7. Tetszőleges háromszögben

$$\frac{\prod(m_a+f_a)}{2\prod f_a} \geqq \frac{\prod(m_a+xf_a)}{\prod m_a+\prod xf_a}, \quad \text{ahol} \quad xf_a \geqq m_a;\ yf_b \geqq m_b;\ zf_c \geqq m_c.$$

Bizonyítás. Kiindulunk az

$$\frac{1}{2}(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) \geqq \frac{(x_1+x)(x_2+y)(x_3+z)}{x_1x_2x_3+xyz}$$

egyenlőtlenségből, ahol $x \geqq x_1 \geqq 1$; $y \geqq x_2 \geqq 1$; $z \geqq x_3 \geqq 1$ és alkalmazzuk a helyettesítéseket.

Alkalmazás 4.8. Tetszőleges háromszögben

$$\frac{\prod(f_a^2+p(p-a))}{2\prod f_a^2} \geqq \frac{\prod(m_a^2+p(p-a))}{\prod m_a^2+p^2T^2}.$$

Bizonyítás. Az előbbi alkalmazás $x \geqq x_1 \geqq 1$ stb. feltételei mellett $x=m_a^2/f_a^2$, $x_1=p(p-a)/f_a^2$ stb. helyettesítésekkel az állítást kapjuk.

Alkalmazás 4.9. Tetszőleges háromszögben

$$(m_a^2+f_a^2)(m_b^2+f_b^2) \geqq 2(m_af_b+m_bf_a)(m_am_b-f_af_b),$$

valamint

$$\prod(m_a^2+f_a^2)^2 \geqq 8\prod(m_af_b+m_bf_a)(m_am_b-f_af_b).$$

(Matematikai Lapok 1/1986, 20 652-es feladata.)

Bizonyítás. Kiindulunk az $(1+y_1^2)(1+y_2^2) \geqq 2(y_1+y_2)(1-y_1y_2)$ egyenlőtlenségből.

Alkalmazás 4.10. Tetszőleges háromszögben

$$\sqrt{\prod m_af_a}\,(\sum \ln(m_a/f_a)) \geqq \prod m_a - \prod f_a.$$

Bizonyítás. Igazoljuk, hogy

$$\frac{\ln x}{x-1} \leqq \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \text{ahol} \quad x = \prod(m_a/f_a) \geqq 1.$$

Alkalmazás 4.11. Tetszőleges háromszögben

$$\sum \frac{f_am_bm_c}{f_bm_c+f_cm_b+m_bm_c} + \prod(1-f_a/m_a) \leqq 1.$$

Bizonyítás. Kiindulunk a $\sum y_1/(y_2+y_3+1)+\prod(1-y_1) \leqq 1$ egyenlőtlenségből.

Alkalmazás 4.12. Tetszőleges háromszögben

$$\sum \frac{f_a}{m_a+f_a} \geqq \frac{3\sqrt[3]{\prod f_a}}{\sqrt[3]{\prod m_a}+\sqrt[3]{\prod f_a}}.$$

Bizonyítás. Kiindulunk a

$$\sum 1/(1+x_1) \geqq \frac{3}{1+\sqrt[3]{x_1x_2x_3}} \quad \text{egyenlőtlenségből.}$$

Alkalmazás 4.13. Tetszőleges háromszögben

$$e\cdot\ln\left(\prod(m_a/f_a)\right)\leqq\sum\frac{1}{a}(f_a/m_a)^a.$$

Bizonyítás. Kiindulunk az $e\cdot\ln x_k\leqq\frac{1}{a}x_k^{-a}$ egyenlőtlenségből, ahol $k=1,2,3$; majd összeadás után alkalmazzuk a helyettesítéseket.

Alkalmazás 4.14. Tetszőleges háromszögben

$$3-\sum(f_a/m_a)\leqq\ln\left(\prod(m_a/f_a)\right)\leqq\sum(m_a/f_a)-3.$$

Bizonyítás. Kiindulunk az $1-y_k\leqq\ln y_k\leqq\frac{1}{y_k}-1$ egyenlőtlenségekből, ahol $k=1,2,3$. Adjuk össze a megfelelő oldalakat és alkalmazzuk a helyettesítést!

Alkalmazás 4.15. Tetszőleges háromszögben

$$6\sqrt[3]{p^2r}\leqq\sum(b+c)\cos\frac{A}{2}\leqq 2(4R+r).$$

Bizonyítás.

$$6\sqrt[3]{p^2r}=6\sqrt[3]{\prod a\cos(A/2)}\leqq 3\sqrt[3]{\prod(a+b)\cos(A/2)}\leqq$$
$$\leqq\sum(b+c)\cos(A/2)\leqq 4R\sum\cos^2(A/2)=2(4R+r).$$

Alkalmazás 4.16. Tetszőleges háromszögben

$$\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}\leqq\sum f_a\leqq\min\left\{p\sqrt{3};\ 4R+r\right\}.$$

Bizonyítás. $\sum f_a\leqq p\sqrt{3}$ ismert egyenlőtlenség (lásd [2]), de

$$\sum f_a\leqq\sum\frac{a(p-a)}{2r}=4R+r\quad\text{és}\quad\sum f_a\geqq\sum\frac{bc}{2R}=\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R},$$

innen az állítást kapjuk.

Alkalmazás 4.17. Tetszőleges háromszögben

$$\frac{2p^2r}{R}\leqq\sum f_af_b\leqq p^2.$$

Bizonyítás.

$$\sum f_af_b\leqq\sum f_a^2\leqq\sum p(p-a)=p^2\quad\text{és}\quad\sum f_af_b\geqq\sum\frac{bc^2a}{4R^2}=2p^2r/R.$$

Alkalmazás 4.18. Tetszőleges háromszögben

$$\frac{2p^2r^2}{R}\leqq f_af_bf_c\leqq\min\left\{p^2r;\ (3R/2)^3\right\}.$$

Bizonyítás.

$$\prod f_a\geqq\prod\frac{bc}{2R}=2p^2r^2/R\quad\text{és}\quad\prod f_a=\prod\frac{2\sqrt{p(p-a)bc}}{bc}=$$

$$=\frac{8p^2rabc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\leqq p^2r\quad\text{és}\quad\prod f_a\leqq\prod 2R\cos^2(A/2)\leqq 27R^3/8.$$

Alkalmazás 4.19. Tetszőleges háromszögben

$$\frac{2}{R} \leqq \sum \frac{1}{f_a} \leqq \frac{1}{r}.$$ (Euler egyenlőtlenségének egy élesítése.)

Bizonyítás. $\sum 1/f_a \leqq 2R \sum 1/ab = 1/r$, valamint $(\sum f_a)(\sum 1/f_a) \geqq 9$, de ismeretes, hogy $\sum f_a \leqq 9R/2$, innen pedig $\sum 1/f_a \geqq 2/R$.

Alkalmazás 4.20. Tetszőleges háromszögben

$$\frac{9}{p^2} \leqq \sum \frac{1}{f_a^2} \leqq \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2T^2}.$$

Bizonyítás.

$$\sum 1/f_a^2 \geqq 9/\sum f_a^2 \geqq 9/\sum p(p-a) = 9/p^2 \quad \text{és}$$

$$\sum 1/f_a^2 \leqq \sum a^2/4T^2 = (p^2 - r^2 - 4Rr)/2T^2.$$

Alkalmazás 4.21. Tetszőleges háromszögben

$$9/p^2 \leqq \sum 1/f_a f_b \leqq (p^2 + r^2 + 4Rr)/4T^2.$$

Bizonyítás.

$$9/p^2 \leqq p/\sum f_a f_b \leqq \sum 1/f_a f_b \leqq (4R^2/abc) \sum 1/a = (p^2 + r^2 + 4Rr)/4T^2.$$

Alkalmazás 4.22. Tetszőleges háromszögben

$$18T^2/(p^2 - r^2 - 4Rr) \leqq \sum f_a^2 \leqq p^2.$$

Bizonyítás.

$$p^2 = \sum p(p-a) \geqq \sum f_a^2 \geqq 9/(\sum 1/f_a^2) \geqq 18T^2/(p^2 - r^2 - 4Rr).$$

Alkalmazás 4.23. Tetszőleges háromszögben

$$3\sqrt[3]{\frac{4R}{p}} \leqq \sum \frac{a}{f_a} \leqq \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{pr}.$$

Bizonyítás.

$$\sum a/f_a \leqq \sum a^2/2T^2 = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{pr} \quad \text{és} \quad \sum a/f_a \geqq 3\sqrt[3]{\prod a/f_a} = 3\sqrt[3]{4R/p}.$$

Megjegyzés. A paragrafusunkban tárgyalt egyenlőtlenségekben akkor és csakis akkor áll fenn az egyenlőség, ha a háromszög egyenlő oldalú.

IRODALOM

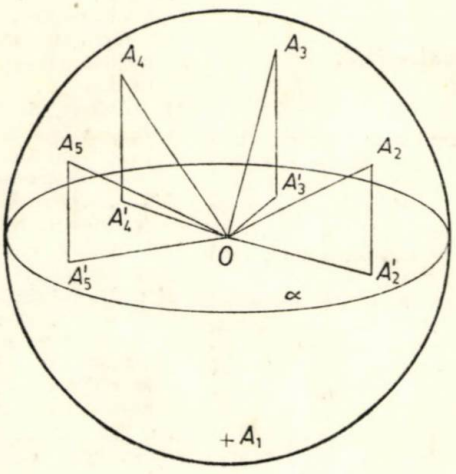
[1] BALLIEU, R.: *Simon Stevin* 26 (1949), 129—134.
[2] BOTTEMA, O. és Co.: *Geometric Inequalities*, Wolters, Noordhoff Publishing, Groningen, 1968.
[3] CHILD, J. M.: *Math. Gaz.* 23 (1939), 138—143.
[4] KLAMKIN, M. S.: *Problem E* 1361, Amer. Math. Monthly 66 (1959) 312.
[5] KOISTRA, R.: *Niew Tijdschr. Wisch.* 45 (1957/58), 108—115.
[6] ANDRICA, D.: *Egy háromszögre vonatkozó egyenlőtlenség és alkalmazásai.* Matematikai Lapok, Kolozsvár-Napoca 1/1986, 2—4. oldal.

Ára: 7,—Ft

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata

KÖNYVTÁR



1987. március * XXXIV. évfolyam 6 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

86-3807 — Szegedi Nyomda
F. v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS

A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban, példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
a) személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését, (nyugdíjasok törzsszámukat) *f)* munkahelyük címét— irányítószámmal.

TARTALOM

Balogh Viktória: Hajlamosak vagyunk... 161
Dr. Kiss Sándor: Az indirekt bizonyítás tanítása 163
Lasztóczi Gyula: Grafikon-pontok szerkesztése geometriai módszerekkel..... 169
Dr. Mátyás Ferenc—Dr. Molnár Sándor: A tanárképző főiskolák hallgatóinak 1986. évi matematikai tanulmányi versenye 175
Miksa Lajos: Ismeretszerzés és alkalmazás az 5. osztályos Matematika-feladatrendszerekben 179
Dr. Nagyné dr. Szilvási Márta: A térgeometria tanítását segítő programokról... 182
Dr. Scharnitzky Viktor: Matematikus vándorgyűlés Nyíregyházán..... 183
Dr. Scharnitzky Viktor: Műszaki főiskolák tanárainak tanácskozása 184
Szabó Tihamér: A középfokú matematikaoktatás néhány problémája 185
Sztrókayné Földvári Vera: Érdekességek a hatványok végződéseivel kapcsolatban .. 190
Dr. Wiegandt Richárd: A matematika tankönyvek terjedelméről 192
ÚJ KÖNYVEK ..... IV.

INHALT

Frl. Viktória Balogh: Wir haben Neigung dazu 161
Dr. Kiss, Sándor: Der Unterricht des indirekten Beweises 163
Lasztóczi, Gyula: Konstruktion von Diagrammpunkten durch geometrische Methoden 169
Dr. Mátyás, Ferenc—Dr. Molnár, Sándor: Bericht über den mathematischen Wettbewerb der Studenten der Pädagogischen Hochschulen im Jahre 1986 175
Miksa, Lajos: Kenntnisverschaffung und Anwendung in den Mathematik-Aufgabensystemen der 5. Klasse der Grundschule 179
Frau Dr. Márta Nagy (geb.: *Szilvási):* Über Programme, die den Unterricht der Stereometrie unterstützen 182
Dr. Scharnitzky, Viktor: Wanderversammlung der Mathematiklehrer in Nyíregyháza 183
Dr. Scharnitzky, Viktor: Tagung der Lehrbeauftragten der Technischen Hochschulen 184
Szabó, Tihamér: Über einige Probleme des Mathematikunterrichts in der Mittelstufe 185
Frau Vera Sztrókay (geb.: *Földvári):* Merkwürdigkeiten in Verbindung mit den Endungen der Potenzzahlen 190
Dr. Wiegandt, Richárd: Über den Umfang der mathematischen Lehrbücher 192
NEUE BÜCHER ..... IV.

Folytatás a III. oldalon.

BALOGH VIKTÓRIA
főiskolai docens
Ho Si Minh Tanárképző Főiskola, Eger

Hajlamosak vagyunk...

Pedagógus körökben, felügyelők között többször végighallgathatok beszámolókat a tanulók tudásáról, s megdöbbenve tapasztalom, hogy milyen sok sikertelenségről, hibáról „fantasztikus példák"-ról tudunk számot adni iskolai munkánk eredményének elemzésekor.

Konkrét felméréseket elemzünk. De figyeltünk-e már arra, hogy leginkább csak a negatív tapasztalatokat hangsúlyozzuk!?

Egy beszámoló kb. így hangzik el:

220 tanulónak 32%-a rosszul számolta ki ezt és ezt a feladatot. Ezt az adatot követi 10—15 tanulónak példákkal illusztrált, csakugyan nagyon hibás elképzelése, megoldása, szakmai hiányosságának ismertetése: „Az osztás helyett szorzott; az osztás algoritmusát nem ismeri; nem váltotta át a mértékegységeket azonos egységekre: neki megfelelt, hogy a kilogrammokban adott mennyiség mérőszámát osztotta a tonnában adott mennyiség mérőszámával. Még olyan is volt, hogy „A zsákban 5 kg búzát szállítottak" — választ adta: kritikátlanul elfogadta ezt az irreális adatot; ellenőrzési igénye nincs; ill. fogalma sincs arról, hogy mit számolt!..."

A 32%-ban hibásan dolgozó tanuló *az említett példámban 70 tanulót jelent.* De már azt sem választjuk szét legtöbbször, hogy a 70 hibásan dolgozó gyermek közül *lényegében még 50 tanuló* jól választotta meg a műveletek sorrendjét, igaz hogy menet közben számolási hibája volt, de inkább figyelmetlenségből, mint a művelet algoritmusának nemismeréséből. A mértékek átváltására gondolt; lényegében ismeri azt; de bizonytalan, mert a nagyobb mértékegységre váltott, s ebben hibázott, sőt nehezítette is a számolását, mert így tört alakkal számolt, pontatlanul ...

A 150 tanulóról pedig szó sem esik, holott közöttük voltak olyanok, akik ügyesen választották meg a műveletek sorrendjét, ügyesen egyszerűsítettek, kerekítést végeztek az adatokban, ezzel könnyebben dolgoztak; a mértékátváltást a legcélszerűbben választották; áttekinthető, pontos a munkájuk; értették amit számoltak stb.

Pedig a felmért tanulóknak 68%-át jelenti ez a 150 gyermek!

Tudjuk, hogy a hibák ellen akarunk küzdeni. Sokak szerint a jó eredményekkel nincs mit foglalkozni, ez természetes, a hibák ismerete adja a fejlődés útját. Igenis, *a jó eredményekből is lehet tanulni!* De mi pedagógusok *hajlamosak vagyunk inkább a rossz megoldásokat elemezni* — és már nem is annyira keressük az okokat!

VÁLTOZTATNI KELLENE AZ ELEMZŐ MUNKÁNKON!

Mennyire más lenne az elemzés hangulata, ha fordítanánk a sorrenden.

1. Ennyi gyermek jól dolgozott, a felmértek ennyi %-ában, mert... jó volt a feladatmegoldásuk ezeknek az ismereteknek a birtokában; *ügyesen, figyelmet érdemlően* oldották meg a feladatot; különösen jó volt a 150

tanuló közül (példámban) 10—15 tanuló munkája, ezért és ezért!

2. Ennyi tanulónál *lehetne segítséget nyújtani ebben és ebben, mert még hibáznak* a feladat adatainak célszerű megválasztásában, a mértékátváltásokban, — figyelmeztetni kell az egyszerűsítési lehetőségek kihasználására, mert akkor számolásuk is pontos lenne...
3. Ennyi gyermeknél — az összes felmértek ennyi %-ában — *ilyen és ilyen eljárásokat kell alkalmazni* az alapismeretek pótlására, a műveleti algoritmus újra kialakítására, a mértékátváltás hibáinak pótlására stb.

A példámban említett, annak az *50 tanulónak sorsa aggaszt,* akik bekerülhetnének a tanulók „középmezőnyébe", mert ők azok, akik „elszámolják", hibásan váltanak át, nem egyszerűsítenek, és ez okoz nekik számolási problémát. A feladat végén a mértékegységet nem rendezik a feladat tartalmához, s ezért nem világos, hogy értik-e a feladat lényegét! De azért ők foglalkoztak a feladattal, jó műveleti sorrendet hajtottak végre, igaz hogy „bukdácsolva", részletekben hibákkal — ezért nem lett jó az eredményük!

Ma gyakori vélemény, hogy *a tanulócsoportok tanulói két részre oszlanak:* van kevés jó és van sok gyenge. Nem vagyunk-e ebben mi is hibásak?

Az elemző módszerünk nem figyel eléggé a fejlődésre alkalmas gyerekekre! Hátha hatékonyabb lenne oktatásunk eredménye a fenti elemzési módszerünkkel!? ... Feltárná a tehetséges „kisebbséget", feltárná a botladozó „középmezőnyt", és végül konkrét feladatot jelölne a „teljesen tájékozatlan" tanulókkal való foglalkozáshoz!

220 tanulóról készített területi felmérés elemzésekor nehezebb kijelölni névre szóló feladatokat (bár ott is lehetne), de egy-egy osztály munkájának elemzésekor feltétlenül szűrhetők ki egyedi feladatok. Az egyes osztályok esetében is mindig *a jó megoldások részletes elemzésével* kezdjük értékelésünket, mert ebből szűrhető le, érthető meg, hogy miért jó a végzett munka. Ezután elemezzük azokat, akiknek *bizonyos területeken javítanivalójuk, gyakorolni való feladatuk van,* s végül szóljunk azokról, *akiknek újra kell megtanulniuk bizonyos dolgokat!*

Az elemzéseket rendszeresen vessük össze a *Tanterv követelményrendszerével* pl. ilyenformán:

a) „*A 6. osztályos* tanulóknak **már 11%-a** tud (lineáris) függvényt ábrázolni a koordináta-rendszerben értéktáblázat nélkül — a hozzárendelési szabályban szereplő együttható és konstans alapján.
A felmért 220 tanulóból ez 24 tanuló! Sőt újabb 34%-uk, vagyis 75 tanuló táblázattal jól ábrázolja a függvénygrafikonokat! Ez a 45%, vagyis 99 tanuló már *eredményesen sajátította el a tantervi anyagnak* ezt a részét."

b) Ha 7. osztályban végeztünk felmérést — és ha a *mértékátváltást* a tanulóknak **csak 57%-a** hajtja végre hibátlanul, akkor ebben az esetben nem lehetünk elégedettek, mert nem csupán a „begyakorlással", de *a megértéssel is baj van!*
A 220 tanulóból az a 125 tanuló, aki hibátlanul dolgozott, nagyon kevés! — Vagy inkább kifejező, hogy *nagyon sok a 95 tanuló, aki nem tud mértéket átváltani!*

Mindkét példa esetében látjuk *az értékeléssel járó feladatot is!*

a) A 6. osztályra említett példában az eredmények fokozása a feladatunk: a további egyenletes képzési tevékenység!

b) A 7. osztályos példánk „eredményét" jogos elmarasztalás illeti! De feladatunk: a mértékekről tanultak teljes összefoglalása és az összefüggések kiemelése. Ezután először indokolással történő, jártassági szintű átváltásokkal ellenőrizzük az átváltások tudatosságát, és ezt követheti a kész-

ség kifejlesztése, a gyakorlás, majd újabb ellenőrző felmérés — különös tekintettel arra a 43%-ra, akiknél a hibát tapasztaltuk!

Egy *„alacsony %-os" adat lehet kedvező,* jó eredmény, ugyanakkor egy *„közepes %-os" adat lehet elég nagy hiányosság* a tanterv követelményével egybevetve!

Az alsótagozatos nevelők számára már próbáltak összeállítani olyan feladatsorokat, amelyek bemutatják, hogy az egyes feladatok teljesítését az adott osztályban hány %-os teljesítménnyel várhatjuk egy — különböző képességű tanulókból — az ún. normális eloszlás szerint összetevődő átlagos tanulócsoportban. Ezektől az „optimális"-an jelölt %-os arányoktól az adott osztály — sok jó vagy több gyenge képességű tanuló esetén — jobbra vagy balra tolódhat el, és éppen ezt akarjuk vizsgálni, hogy a jelölt szinthez képest milyen az osztály helyzete.

Régen tudott dolog, hogy *nem lehet minden feladatot azonos mércével mérni.* Ugyanígy *nem lehet minden tanulótól sem azonos teljesítményt elvárni, sem „kipréselni".* Annak szétválasztása a legnehezebb, hogy

a) meddig ered az alacsony teljesítmény a *magatartási és a munkához való rossz viszony* problémáiból?

b) meddig *képességbeli* vagy *a terhelést nem tűrő fiziológiai* problémákból?

c) meddig *szociológiai hátrányos helyzet* problémáiból?

A fenti csoportokba tartozó gyermekekkel a külön foglalkozás más-más eljárást, más-más módszert igényel. Más-más célt tudunk a gyermek elé kitűzni, más-más feladatsorral lehet „egyéni teljesítményük" szintjét a legmagasabbra emelni. Ezért szükségszerű a differenciált foglalkozás az óráinkon, a tananyag differenciált módon való feldolgozása.

Ha *minden* tanulót és *minden* feladatot sajátosan a maga szintjén vizsgálunk, akkor nem lesz beszámolónk hangulata elkedvetlenítő, mert azt vizsgáljuk, hogy *eljuttattunk-e minden tanulót az egyéni képességének maximális szintjére!*

DR. KISS SÁNDOR
főiskolai adjunktus
Bessenyei György Tanárképző Főiskola, Nyíregyháza

Az indirekt bizonyítás tanítása

Az iskolai matematikatanítás tananyagközpontú, ami azt jelenti, hogy meg kell tanítani bizonyos matematikai fogalmakat, tételeket, s ezeken alapuló eljárásokat. Didaktikai szempontból az ilyen típusú oktatásban a materiális képzés a domináns. A formális képzést erősíthetjük, ha különféle matematikai bizonyítási módszereket is tanítunk, illetve ezeket tudatosítjuk. E téren elsősorban az indirekt és direkt bizonyításra, a konstruktív bizonyításra, az ellenpéldával történő cáfolásra, ekvivalencia formájában kimondott tételek bizonyítására gondolok (szükséges és elégséges feltétellel kapcsolatos kérdések). Továbbá fontosnak kell tekintenünk a definíciók, tételek, bizonyítások logikai szerkezetében előforduló szakkifejezések ismeretét pl.: kvantorok, junktorok, sajátos szakkifejezések (feltétel, következmény, szükséges feltétel, elégséges feltétel, következik, ellentmondás, tétel és megfordítása stb.). A fentiek mellett a gyakran végzett gondolkodási műveletek tudatosítása is lényeges pl.: általánosítás, analógia, absztrakció, rendszerezés, csoportosítás (főleg az esetszétválasztás) stb.

Többek között Kelemen László, a nemrég elhunyt kiváló pszichológus kísérletileg is igazolta, hogy a tanítás hatékonyabb, ha a gondolkodási módszerek tudatosítása is megtörténik. Skemp ([4] 85. oldal) is ezen felfogást vallja: „Jelen-

leg a tudatosítási képesség és a formális következtetés fejlesztése nem tárgya az iskolai tanításnak, részben azért, mert még alig ismerték fel jelentőségüket, részben pedig, mert nem tudjuk, hogyan kellene tanítani." Az utolsó észrevételre persze Pólya és Lakatos nyomán tudunk válaszolni, de kétségtelen, hogy egyébként igaza van Skempnek.

A fentebb vázolt gondolatkörből egyetlen kérdést kívánok kiragadni: az indirekt bizonyítás általános iskolai tanításának alapozását, illetve ennek folytatását a gimnázium első osztályában. A közölt anyagot matematikában kiemelkedően tehetséges tanulókkal szakkörben több évfolyamon kipróbáltam. A szakköröm tagjai a városi tehetségkutató verseny első 15—17. helyezettjeiből kerülnek ki, közülük többen megyei, illetve országos versenyen is szépen szerepeltek. Hasonló színvonalú szakkörben feltétlenül feldolgozható a feladatanyagom, iskolai szakkör esetén a nehezebb feladatokat egyszerűen el kell hagyni.

Az indirekt bizonyítás logikai alapjai:

Az indirekt bizonyítás során a tétel igazságát a tétel ellentéte hamisságának kimutatásával igazoljuk. A tanulók előtt a következő logikai vázat próbálom felépíteni:

Bizonyítandó az A állítás.

Tegyük fel, hogy A nem igaz ($\neg A$).

Ezen feltételre támaszkodva korrekt matematikai okoskodást (következtetést) végzünk, amely végén $\neg A$-val ellentmondásra jutunk. Így tehát az egész okoskodás hamis volt, el kell fogadnunk $\neg A$ ellenkezőjét, azaz $\neg(\neg A) = A$-t igaznak. Ezzel bizonyítottuk az eredeti állítást.

Az indirekt bizonyítás során építünk a helyes gondolkodás formális logikai törvényei közül a következőkre:

Az ellentmondástalanság törvénye: Két egymással azonos vonatkozásban ellentmondó kijelentés nem lehet egyidejűleg igaz.

$$\forall A \quad A \wedge \neg A \equiv \text{h} \quad \text{(kontradikció)}.$$

A kizárt harmadik törvénye: Azonos körülmények között két, egymásnak ellentmondó kijelentés közül az egyiknek igaznak kell lenni:

$$\forall A \quad A \vee \neg A \equiv \text{i}.$$

A fenti két törvényt a tanulók triviálisnak veszik, így könnyen el is fogadják azokat.

Mint minden bizonyítás, így az indirekt bizonyítás is a következtetések körébe tartozik a logikán belül. A bizonyítások úgy is felfoghatók, mint a következtetések fordított műveletei. A bizonyításnál adott a zárótétel, s keressük a premisszákat. Másképpen fogalmazva, egy olyan okoskodási láncot keresünk, amely éppen a bizonyítandó állításhoz vezet el. A következtetéseknél ez fordítva van, a premisszák adottak, s keressük a zárótételt. A következtetés, illetve a bizonyítás sémája helyes voltának eldöntéséhez logikai eszközöket használunk.

Az indirekt bizonyítás néhány sémája:

1. $\dfrac{A \to B, \neg B}{\neg A}$ (modus tollens).

A konklúzió a következők miatt igaz: $\neg B = \text{i}$, így $B = \text{h}$. Mivel $A \to B = \text{i}$ és az utótag logikai értéke h, ezért $A = \text{h}$, vagyis $\neg A = \text{i}$, s ezt akartuk belátni.

A fenti sémára nézzünk egy feladatot!

1. feladat. Két csoportba oszthatjuk-e a következő számokat úgy, hogy az egyik csoportba tartozók összege 9-cel legyen nagyobb, mint a másik csoportba tartozók összege:

$$-7, \ -4, \ -2, \ 3, \ 5, \ 9, \ 10, \ 18, \ 21, \ 33.$$

Az A állítás most az lesz, hogy a kívánt felosztás megvalósítható. A B pedig: a 9-es szám törlése után maradt számok összegének fele egész szám. Innen már könnyű kiokoskodni, hogy nem létezik a feladatban kívánt felosztás.

A fenti feladat könnyebb lenne, ha megmondtuk volna, hogy nem létezik a kívánt felbontás, így eleve nem kellene kísérleteznünk ezzel. Érdemes tudatosítani a gyerekekben a következőt: ha eldöntendő formában tálalták a problémát, akkor két lehetőség van: vagy megvalósítható a feladat állítása, vagy nem. Ha megvalósítható, akkor adjunk meg egy jó megvalósítást (konstruktív bizonyítás), ha nem, akkor igazoljuk sejtésünket indirekt úton.

2. Az **1.** pont alatt leírt séma cáfoló alakját kapjuk, ha A helyére $\neg A$-t írunk, azaz:

$$\frac{\neg A \to B, \neg B}{A}.$$

3. $\dfrac{A \to \neg B, B}{\neg A}$.

A sémák helyességét nem bizonyítjuk, mert azt az **1.** pontban leírtakhoz hasonlóan könnyű elvégezni. Inkább egy példát mutatunk hetedikes gyerekek számára:

2. feladat. Bizonyítandó, hogy nincs olyan háromszög, amelynek két derékszöge van!

A B állítás ebben az esetben: a háromszög szögeinek összege 180°. Az A állítás: a háromszögnek két derékszöge van (esetleg úgy is kimondhatjuk, hogy a háromszögnek legalább két derékszöge van).

Bizonyításokban és absztrakt gondolkodásban járatlan tanulók számára szokatlan az ilyen feladat, hiszen szemlélet alapján elfogadták a 2. feladat állításának helyességét. Tulajdonképpen most jutottunk el az indirekt bizonyítások során oly gyakran alkalmazott kifejezéshez: „tegyük fel az állítás ellenkezőjét...". Az indirekt bizonyításoknál többek között ezt kell tudatosítanunk a tanulókban.

4. A **3.** pontban leírt séma cáfoló alakját is felírhatjuk:

$$\frac{\neg A \to \neg B, B}{A}$$

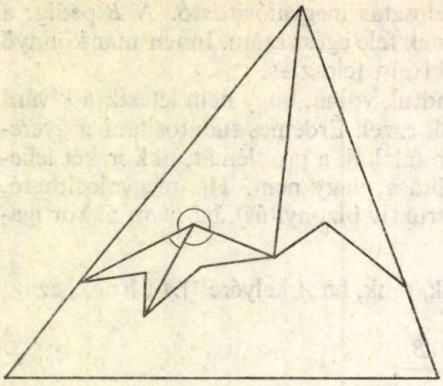
5. Meg kell még említenünk a lehetetlenre való visszavezetést (reductio ad absurdum) két sémáját:

$$\frac{\neg A \to B}{\neg A \to \neg B} \qquad \frac{A \to B}{A \to \neg B}$$
$$A \qquad\qquad \neg A$$

Találóan írja Pólya, hogy az indirekt bizonyítás és a lehetetlenre való visszavezetés elsősorban szemléletmódjában különbözik egymástól. Az ilyen bizonyítások egymásba átfogalmazhatók. Példaként egy hetedikes KMBK feladatot említünk.

3. feladat. Feldarabolható-e egy háromszög véges sok konkáv négyszögre?

A bizonyítás során felhasználjuk, hogy a felbontásban szereplő konkáv négyszögek mindegyikének legalább egy csúcsa a háromszög belsejében lesz.



1. ábra

A *B* állítás most a következő: n db konkáv négyszög belső szögeinek összege $n \cdot 360°$. A szögösszeget kétféleképpen fogjuk kiszámítani (1. ábra). Ha létezik a felbontás, van n db konkáv négyszögünk, így ezek szögeinek összege $n \cdot 360°$. Másrészt az n db konkáv négyszög mindegyikének van legalább egy olyan csúcsa, amely a háromszög belsejében van. Ezen csúcsnál keletkező teljesszög felbomlik kisebb szögekre, amelyek egyértelműen hozzárendelhetők valamelyik konkáv négyszöghöz. Tehát a háromszöget felbontó konkáv négyszögek belső szögeit csoportosíthatjuk (osztályozhatjuk) aszerint, hogy csúcsuk a háromszög belsejében vagy határán van. A belül levők szögösszege a fentiek alapján legalább $n \cdot 360°$, amihez még hozzá kell adnunk a háromszög határán keletkező szögösszeget. Tehát a fentiek alapján egyrészt beláttuk, hogy a felbontás létezése esetén a kapott konkáv négyszögek szögösszege $n \cdot 360°$, illetve ennél több. Ez ellentmondás, tehát nem létezik a kívánt felbontás.

Mivel juthatunk ellentmondásra?

Módszertanilag is érdekes lehet, hogy az indirekt okoskodás során mivel vezetjük ellentmondásra a bizonyítandó állítást. Ezek a következők lehetnek:

1. kiinduló feltevésünkkel,
2. valamilyen ismert tétellel,
3. axiómával.

Mindhárom lehetőségre tekintsünk egy-egy példát az előbbi felsorolás sorrendjében.

4. feladat. Legyen adott négy különböző szám: a, b, c és d. Igazoljuk, hogy nem lehet belőlük 2×2-es bűvös négyzetet készíteni!

a	b
c	d

2. ábra

Megoldás: Tegyük fel, hogy a 2. ábra egy megfelelő bűvös négyzetet szemléltet. A bűvös tulajdonságból adódik, hogy $a+b=a+c$, azaz $b=c$, ami ellentmond a feladat feltevésének.

5. feladat. Bizonyítandó, hogy konvex hatszögnek nem lehet 4 hegyesszöge!

Megoldás: Ismert tétel, hogy bármely konvex sokszög külső szögeinek összege 360°. Ha lenne 4 hegyesszöggel rendelkező konvex hatszög, akkor az ezek mellett fekvő külső szögek összege több lenne 360°-nál, ami ellentmond az előbb említett tételnek.

6. feladat. Igazoljuk, hogy ha a síkban egy egyenes két párhuzamos egyenes közül metszi az egyiket, akkor metszi a másikat is!

Megoldás: Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás, azaz van olyan egyenes, amely két párhuzamos közül az egyiket metszi, de a másikat nem. Ekkor azonban volna olyan pont a síkban, amelyen át egy adott egyenessel két párhuzamos egyenest is húzhatnánk, de ez a párhuzamossági axióma miatt lehetetlen.

Néhány módszertani megjegyzés:

Az indirekt bizonyítás tanítását 7. osztályban kezdem. Általában egy egész foglalkozáson (2 óra) ilyen feladatokat oldunk meg a matematika különböző területeiről, s a későbbiek során is gyakran visszatérünk ezen bizonyítási módra. Versenyeken (KMBK-n a Középiskolai Matematikai Lapok éves pontversenyén) gyakran tűznek ki olyan feladatokat, melyek megoldásához indirekt bizonyítás kell, ezért a gyakorlás során a megtanítás stratégiáját kell alkalmazni a hosszú érlelgetés helyett. Véleményem szerint eszköz jelleggel kell funkcionálnia azon tanulóknál, akik egy országos versenyen sikerrel akarnak szerepelni.

Tapasztalatom szerint az indirekt bizonyítás csak az első néhány feladatnál szokatlan a tanulóknak. Nem merik feltételezni a bizonyítandó állítás ellenkezőjének helyességét, s innen egy okoskodási láncot kiépíteni. Ez a megfelelő mintapéldák kiválasztásának szükségességét húzza alá.

A bizonyítás során felhasznált érvek kiválasztásának szükséges feltétele, hogy a tanuló rendelkezzék egy mozgékony matematikai apparátussal. Az első foglalkozáson alkalmazott feladatok éppen ezért igen változatos témájúak: geometriai, számelméleti, algebrai, gráfelméleti stb. Kevés gyakorlás után már megérzik a gyerekek, hogy egy adott probléma megoldásánál célszerű-e indirekt bizonyítást alkalmazni. Felépítik a megfelelő logikai vázat, s ha rendelkeznek megfelelő mennyiségű tudással, akkor a vázat tartalommal is fel tudják tölteni, azaz végrehajtják a bizonyítást.

A következőkben elsősorban azon feladatanyagomat közlöm, amelyet az indirekt bizonyítás gondolatának kialakításához használok, illetve a begyakorláshoz.

Számelméleti feladatok:

7. Egy téglatest élei különböző pozitív egész számok. Lehet-e a felület mértékszáma prímszám? És a térfogat mértékszáma?

8. Van-e olyan kétjegyű szám, amelynek legalább négy különböző prímosztója van? Vigyük tovább a fenti gondolatot: van-e olyan háromjegyű szám, amelynek legalább öt különböző prímosztója van?

9. Lehet-e három egymást követő pozitív egész szám összege prímszám? Általánosítsuk a feladatot: lehet-e n ($n \geqq 3$) egymást követő pozitív egész szám összege prímszám?

10. Van-e olyan egész szám, amelyben a számjegyek szorzata 9900?

11. Három egymást követő prímszámot akkor nevezünk hármasikernek, ha a szomszédosak különbsége 2. Hány hármasiker prímszám van? Hány négyesiker? (A feladat megoldása két lépésből áll. Egy konstruktív rész, azaz meg kell adni az összes ilyen számot, majd bizonyítani, hogy nincs több, ami indirekt módon történhet.)

Geometriai feladatok:

12. Adott az A és B pont. Igazoljuk, hogy a szakaszfelező merőleges pontjain kívül nincs a síkban olyan pont, amelyre teljesül: $PA = PB$!

13. Adott a síkban egy e egyenes és két pont: A és B. Keressük meg az e egyenes azon P pontját, amelyre $PA + PB$ minimális!

14. Adott az $ABCD$ konvex négyszög. Keressük meg a síkjában azon P pontot, amelyre a $PA+PB+PC+PD$ összege minimális!

A fenti két feladatból is látszik, hogy a geometriai szélsőértékekkel kapcsolatos problémák tág lehetőséget biztosítanak az indirekt bizonyítás gyakorlására. Ezen feladatok általában egy konstruktív bizonyítást igénylő részt is tartalmaznak, hiszen meg kell adni egy geometriai objektumot, amely rendelkezik a kívánt szélsőérték tulajdonsággal, illetve bizonyítani kell, hogy ennél nincs jobb.

15. Van-e olyan háromszög, amelynek minden magassága nagyobb, mint 2 cm, a területe mégis kisebb, mint 2 cm^2?

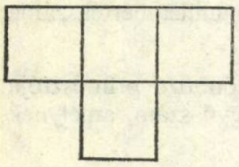
16. Igazoljuk, hogy nincs olyan kúp, amelynél az alaplap területe egyenlő a palást területével!

17. Bizonyítandó, hogy nincs olyan gúla, amely alaplapja négyzet, oldallapjai szabályos háromszögek, s az egy csúcsba futó alap- és oldalél szöge megegyezik az alap és oldallap szögével! Módosítsuk a feladatot a következőképpen is: az oldallapok egybevágó egyenlő szárú háromszögek legyenek.

18. Egységnyi sugarú körben adott négy pont. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet az általuk meghatározott szakaszok mindegyike $\sqrt{2}$-nél nagyobb! Oldjuk meg a feladat térbeli analógját is!

Sakktáblához kapcsolódó feladatok:

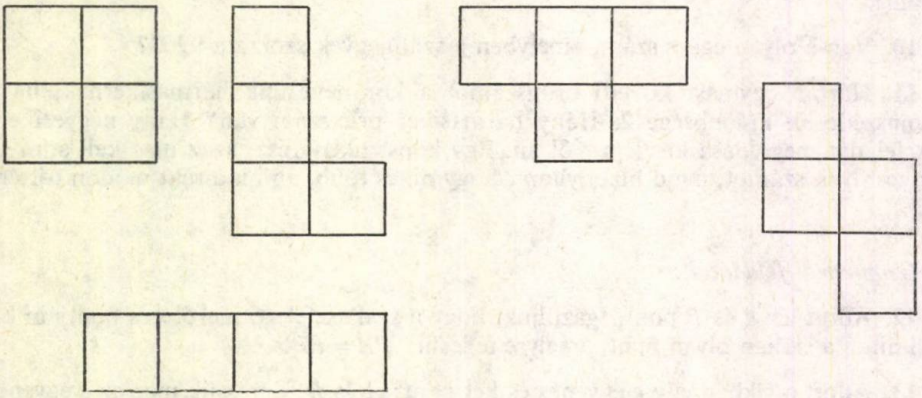
19. A 8×8-as méretű sakktáblán eljuthatunk-e a bal alsó sarokból a jobb felsőbe bástyalépésekkel?



3. ábra

20. A 8×8-as sakktábláról vegyünk le két sarokmezőt. Lefedhető-e a maradék 2×1-es méretű dominólapokkal? (Esetszétválasztás is szükséges.)

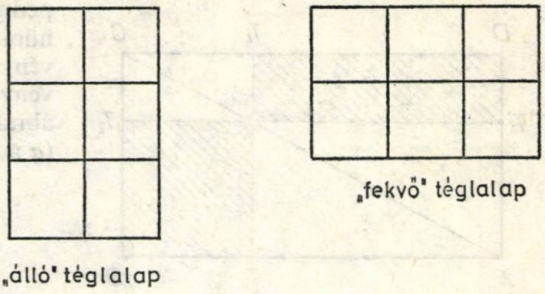
21. Igazoljuk, hogy a 10×10-es sakktábla nem fedhető le a 3. ábrán látható alakzattal egyrétegűen és hézagmentesen! Az alakzatok nem lóghatnak le a tábláról!



4. ábra

22. Igazoljuk, hogy a 4. ábrán megadott 5 figurából nem lehet téglalapot összeállítani! (Egy figurát csak egyszer szabad felhasználni!)

23. Adott a síkban egy 14×9-es „nagy" téglalap, továbbá 10 db ún. „álló" és 11 db ún. „fekvő" téglalap (lásd 5. ábra), melyek mérete 2×3-as. Bizonyítsuk be, hogy ha a kis téglalapokat nem forgathatjuk el, akkor nem fedhető le velük a nagy téglalap!



5. ábra

Útmutatás a megoldáshoz:

1. megoldás: Színezzük ki a nagy téglalap 1., 3., ... 9. sorát feketére, a többit hagyjuk fehéren. Ekkor $14 \cdot 5 = 70$ fekete és $14 \cdot 4 = 56$ fehér mező lesz. Színezzük ki hasonló módon az álló, illetve fekvő téglalapokat is, s számoljuk le így is a fekete és fehér mezők számát.

2. megoldás: Számozzuk be a nagy téglalap mezőit 1-től 126-ig. Ekkor a beírt számok összege könnyen meghatározható, ami páratlan lesz. Gondolatban számozzuk be a kis téglalapokat is, s vizsgáljuk az így beírt számok paritását!

IRODALOM

[1] KELEMEN LÁSZLÓ: A gondolkodás nevelése az általános iskolában. Tankönyvkiadó, Bp. 1973.
[2] LAKATOS IMRE: Bizonyítások és cáfolatok. Gondolat K. Bp. 1981.
[3] PÓLYA GYÖRGY: A gondolkodás iskolája. Gondolat K. Bp. 1957.
[4] R. SKEMP: A matematikatanulás pszichológiája. Gondolat K 1975.
[5] SZENDREI—TÓTH: Logika. Főiskolai jegyzet. Tk. Bp. 1976.
[6] URBÁN JÁNOS: Matematikai logika. (Példatár.) Műszaki K. Bp. 1983.

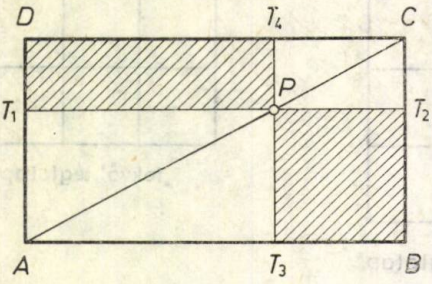
LASZTÓCZI GYULA
középiskolai tanár
Szilágyi Erzsébet Gimnázium,
Budapest

Grafikon-pontok szerkesztése geometriai módszerekkel

A matematika látszólag távoli témakörei is ezer szállal kapcsolódnak egymáshoz, az egyes témakör eredményeit, módszereit sokszor haszonnal alkalmazhatjuk egy másik, látszólag távoli témakör felépítése és kidolgozása során. Így van ez a geometria és a függvénytan esetében is. Az egyes geometriai transzformációkat például pontokhoz pontokat rendelő függvényeknek tekintjük, de fordítva is igaz, a geometria módszereit és eredményeit is haszonnal alkalmazhatjuk a függvények témakörének kidolgozása során. Gondoljunk például a függvények Descartes-féle koordináta-rendszerben történő ábrázolására, vagy a nyíldiagramos függvényábrázolásra. A tanítás során célszerű keresni és tudatosítani az egyes témakörök közötti kapcsolódási pontokat, kiemelni az egyes témakörök belső összefüggéseit. Ezzel hozzájárulhatunk a matematikáról alkotott helyes kép kialakításához is. Az alábbiakban olyan példákat szeretnék mutatni, amelyekben geometriai eredményeket használunk függvények ábrázolása során.

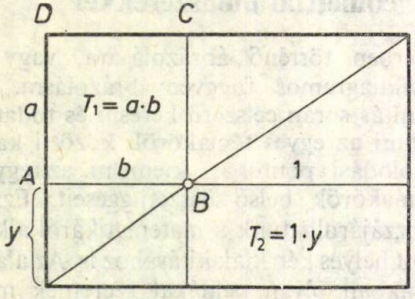
Újvári István is említi cikkében (Felvételi feladatsorok a szakközépiskolában, A Matematika Tanítása 1985/5.) a kö-

vetkező feladatot. Egy téglalap átlójának P pontján át párhuzamosokat húztunk az oldalakkal. Döntsük el, hogy az 1. ábrán látható satírozott téglalapok területei egyenlőek-e vagy sem!



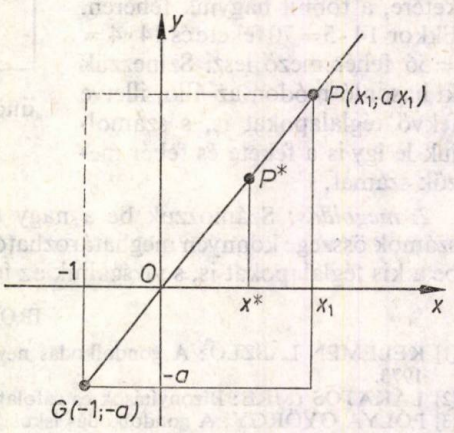
1. ábra

A háromszögek egybevágóságára vonatkozó ismereteinkre és arra hivatkozva, hogy az egybevágó háromszögek területe egyenlő, nagyon könnyen beláthatjuk a feladatban levő két téglalap területének egyenlőségét. Ez a feladat azonban nemcsak felvételi vizsgán szerepelhet haszonnal, hanem eredményét felhasználva függvényeket is ábrázolhatunk. Módosítsuk kicsit a feladatot. Adott a hosszúságegység. Szerkesszünk olyan szakaszt, amelynek hossza egy adott a, b oldalú téglalap területének mértékével egyenlő. A szerkesztés menete a 2. ábráról leolvasható.



2. ábra

Alapfeladatunk eredményének (a téglalapterületek egyenlőségének) felhasználásával $y-a\cdot b$ adódik, vagyis az y-nal jelölt szakasz hossza az $ABCD$ téglalap területének mértékével egyenlő. Rögzítsük most a téglalap a oldalát és változtassuk a másik oldalt, amit jelöljön x. A téglalap területe ekkor $a\cdot x$, a szerkesztés során kapott y szakasz hossza pedig éppen ax. Sikerült megszerkesztenünk az $f:x\mapsto ax$ $(x\in\mathbf{R}^+, a>0)$ függvény adott változóértékhez tartozó függvényértékét. Helyezzük el alkalmasan ábránkat egy koordináta-rendszerben. (a adott pozitív érték.)



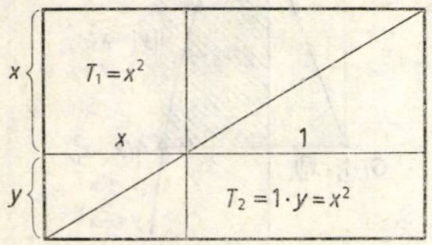
3. ábra

A $P(x; ax)$ pont szerkesztésünkből adódóan mindig illeszkedik a GO egyenesre, tehát a grafikonpontok egy egyenesre illeszkednek, hiszen G és O rögzített pontok. Fordítva, könnyen belátható, hogy az OP félegyenes bármely pontja szerepelhet grafikonpontként. Beláttuk tehát, hogy az $f:x\mapsto ax\,(x\in\mathbf{R}^+)$ függvény képe az origóból induló félegyenes.

Terjesszük ki függvényünk értelmezési tartományát a teljes $\mathbf{R}$ halmazra. Legyen $g:x\mapsto ax\ (x\in\mathbf{R})$. A $g(-x)=-g(x)$ összefüggés alapján könnyen belátható, hogy negatív x értékek esetén is illeszkednek az $(x; ax)$ pontok a GO egyenesre (az $(x; ax)$ pont a $(-x; -ax)$ pont origóra vonatkozó tükörképe), könnyen belátható az is, hogy a GO egyenes minden pontja grafikonpont. Megkaptuk tehát az $x\mapsto ax$ $(x\in\mathbf{R})$ függvény grafikonját. Természetesen fölösleges egy egyenes pontjait ilyen körülményes mó-

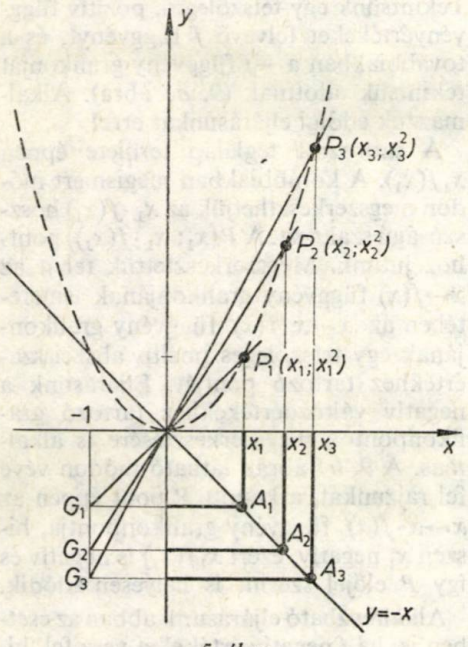
don szerkeszteni, eljárásunk haszna ebben a speciális esetben az, hogy segítségével viszonylag egyszerű eszközökkel bizonyítani tudjuk, hogy az $f: x \mapsto ax$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény képe egyenes. (Negatív a érték esetén is belátható, hogy a grafikon egyenes. Ezzel most nem foglalkozunk.)

Módosítsuk egy kicsit újból alapfeladatunkat. Kiinduló téglalapunk legyen négyzet, és tekintsük változónak a négyzet x oldalhosszát. (4. ábra.)



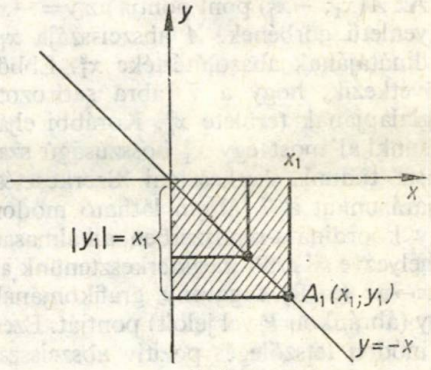
4. ábra

Az y-nal jelölt szakasz hossza most x^2, ami azt jelenti, hogy sikerült megszerkesztenünk az $f: x \mapsto x^2$ ($x \in \mathbf{R}^+$) másodfokú függvény adott változóértékhez tartozó függvényértékét. Helyezzük el ábránkat alkalmasan egy koordinátarendszerben (5. ábra). Szerkesztési eljárásunk a jól ismert parabola pontjait eredményezi.



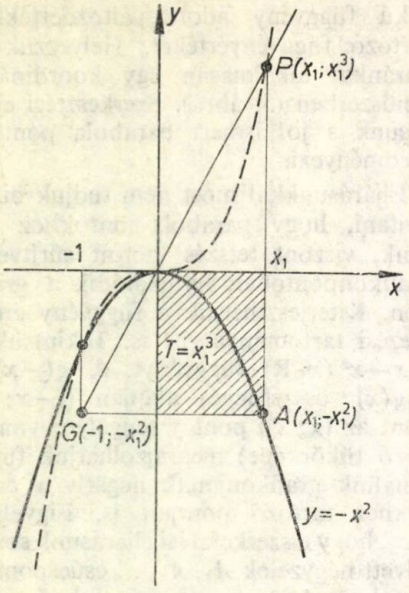
5. ábra

Eljárásunkkal most nem tudjuk bizonyítani, hogy parabola-pontokhoz jutunk, viszont tetszés szerint sűrítve a grafikonpontokat, kirajzolódik a grafikon. Kiterjeszthetjük a függvény értelmezési tartományát itt is. Tekintsük a $g: x \mapsto x^2$ ($x \in \mathbf{R}$) függvényt. A $g(-x) = g(x)$ összefüggés alapján ($(-x; x^2)$ pont az $(x; x^2)$ pont y tengelyre vonatkozó tükörképe) megrajzolhatjuk függvényünk grafikonjának negatív x értékekhez tartozó pontjait is. Figyeljük meg, hogy a szerkesztési eljárásunk során felvett négyzetek $A_1, A_2, \ldots$ csúcspontjai illeszkednek az $y = -x$ egyenletű egyenesre. Bármelyik grafikonpont szerkesztésénél felhasznált négyzet „jobb alsó" csúcspontja illeszkedik erre az egyenesre (6. ábra).

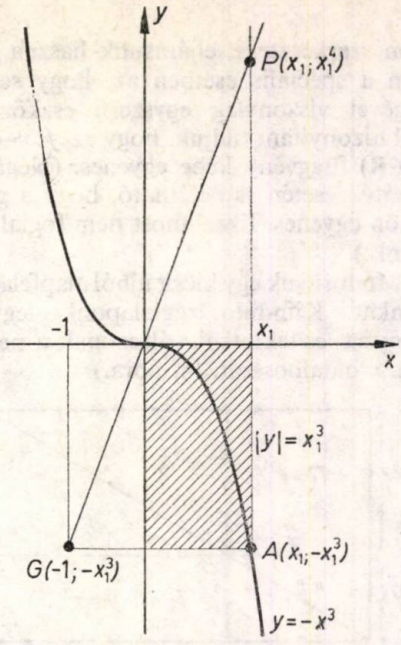


6. ábra

Az A_1 pont abszcisszája x_1 ($x_1 > 0$), ordinátájának abszolútértéke szintén x_1. Ebből adódik, hogy a szerkesztésnél felhasznált (satírozott) négyzet területe x^2. Ez adja az ötletet további függvénygörbék pontjainak szerkesztéséhez. Ne az $y = -x$, hanem pl. az $y = -x^2$ egyenletű görbét vegyük föl. (Tegyük föl, hogy ezt már ismerjük, hiszen az $x \mapsto x^2$ ($x \in \mathbf{R}$)



7. ábra



8. ábra

függvény grafikonjának tetszőleges pontját megszerkeszthetjük.)

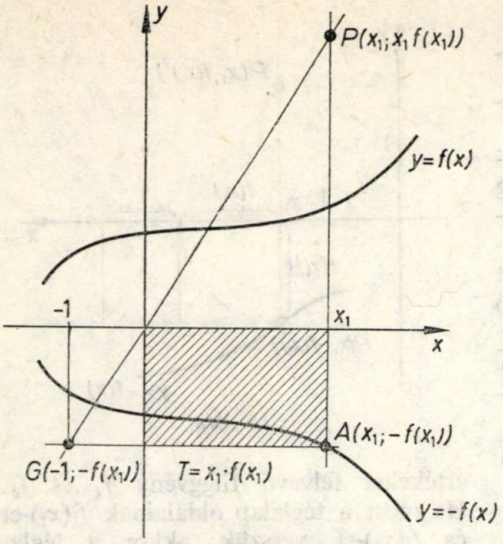
Az $A(x_1; -x_1^2)$ pont pontja az $y = -x^2$ egyenletű görbének. A abszcisszája x_1, ordinátájának abszolútértéke x_1^2. Ebből következik, hogy a 7. ábra satírozott téglalapjának területe x_1^3. Korábbi eljárásunkkal most egy x_1^3 hosszúságú szakaszt tudunk szerkeszteni. Szerkesztési eljárásunkat a 7. ábrán látható módon egy koordináta-rendszerben alkalmasan elhelyezve sikerült megszerkesztenünk az $f: x \mapsto x^3$ $(x \in \mathbf{R})$ függvény grafikonjának egy (ábránkon P-vel jelölt) pontját. Ezen a módon tetszőleges pozitív abszcisszaértékhez tartozó pontot szerkeszthetünk. A negatív x értékekhez tartozó pontokat az $f(-x) = -f(x)$ összefüggés alapján szerkeszthetjük. Eljárásunkkal az $x \mapsto x^3$ függvény grafikonjának tetszőleges pontját megszerkeszthetjük. Tegyük föl, hogy ismerjük már az $x \mapsto x^3$ függvény grafikonját. Ebből kiindulva, az $x = -x^3$ egyenletű görbe segítségével az előbb látott módon megszerkeszthetjük az $x \mapsto x^4$ $(x \in \mathbf{R})$ függvény grafikonjának tetszőleges abszcisszájú pontját (8. ábra).

Eljárásunk folytatásával megszerkeszthetjük rendre az $x \mapsto x^5$ $(x \in \mathbf{R})$, $x \mapsto x^6$ $(x \in \mathbf{R})$ stb. függvények grafikonpontjait.

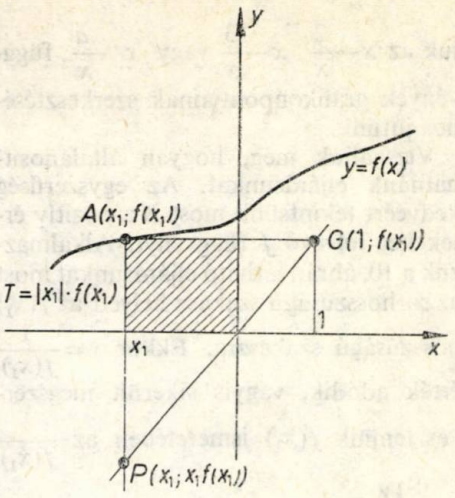
Próbáljuk általánosítani eljárásunkat. Tekintsünk egy tetszőleges, pozitív függvényértékeket felvevő f függvényt, és a továbbiakban a $-f$ függvény grafikonját tekintsük adottnak (9. *a)* ábra). Alkalmazzuk eddigi eljárásunkat erre!

A satírozott téglalap területe éppen $x_1 f(x_1)$. A korábbiakban megismert módon megszerkeszthetjük az $x_1 \cdot f(x_1)$ hosszúságú szakaszt. A $P(x_1; x_1 \cdot f(x_1))$ ponthoz jutunk. Megszerkesztettük tehát az $x \mapsto f(x)$ függvény grafikonjának ismeretében az $x \mapsto x \cdot f(x)$ függvény grafikonjának egy tetszőleges pozitív abszcisszaértékhez tartozó pontját. Eljárásunk a negatív változóértékekhez tartozó grafikonpontok megszerkesztésére is alkalmas. A 9. *b)* ábrán látható módon véve fel rajzunkat, a kapott P pont éppen az $x \mapsto x \cdot f(x)$ függvény grafikonpontja, hiszen x_1 negatív, ezért $x_1 f(x_1)$ is negatív és így P előjel szerint is helyesen adódik.

Alkalmazható eljárásunk abban az esetben is, ha f negatív értékeket vesz fel, hi-



9. a) ábra

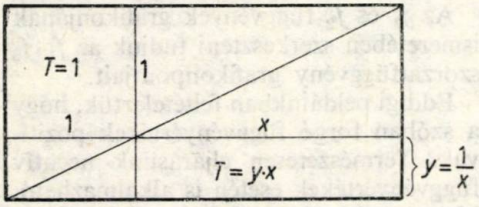


9. b) ábra

szen $x \mapsto f(x)$ szerkeszthető, előjele pedig x és $f(x)$ előjelének ismeretében meghatározható. Ezzel itt részletesebben nem foglalkozunk.

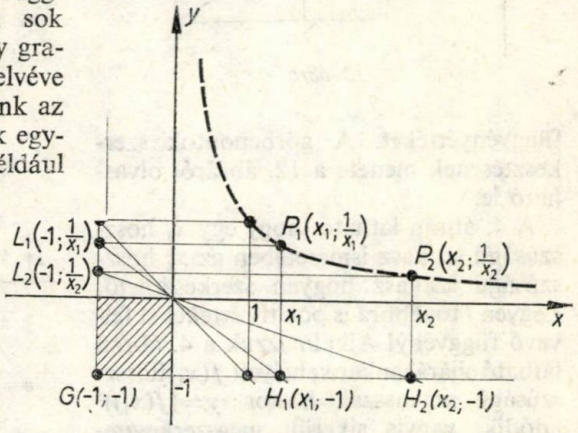
Ismertetett eljárásunk segítségével megszerkeszthetjük az $x \mapsto x \cdot f(x)$ függvény grafikonjának tetszőlegesen sok pontját, ha ismerjük az f függvény grafikonját. Eljárásunkkal elég sűrűn felvéve a grafikonpontokat, képet kaphatunk az $x \mapsto x \cdot f(x)$ függvény grafikonjának egy-egy részletéről. Ábrázolni tudjuk például az $x\sqrt{x}$; $x \cdot e^x$; $x \cdot \sin x$; $x^{5/2}$; $x^{7/2}$ stb. függvényeket.

Módosítsuk kicsit feladatunkat. Tekintsük a kiinduló téglalapunkat rögzítettnek. Legyen az például az egységnégyzet. Szerkesztési eljárásunk ekkor a 10. ábra szerint éppen az $1/x$ hosszúságú szakasz szerkesztését adja. (**x a** változó **szakasz** hosszát jelöli.)



10. ábra

Szerkesztési eljárásunkkal alkalmas koordináta-rendszerben (11. ábra) az $x \mapsto \frac{1}{x}$ $(x \in \mathbf{R}^+)$ függvény grafikonpontjainak szerkesztéséhez jutunk.



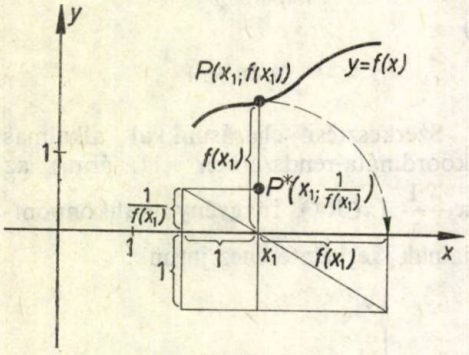
11. ábra

Ebből kiindulva az $f(-x) = -f(x)$ tulajdonság (origóra vonatkozó tükrözést jelent) felhasználásával megkaphatjuk az $x \mapsto \frac{1}{x}$ $(x \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$ függvény grafikonját.

Ha a 10. és 11. ábrán a rögzített téglalap területét 2-nek, 3-nak vagy a-nak választ-

juk az $x \mapsto \frac{2}{x}$, $x \mapsto \frac{3}{x}$ vagy $x \mapsto \frac{a}{x}$ függvények grafikonpontjainak szerkesztéséhez jutunk.

Vizsgáljuk meg, hogyan általánosíthatnánk eljárásunkat. Az egyszerűség kedvéért tekintsünk most is a pozitív értékeket felvevő f függvényt. Alkalmazzuk a 10. ábrán látható eljárásunkat most az x_1 hosszúságú szakasz helyett az $f(x_1)$ hosszúságú szakaszra. Ekkor $y = \frac{1}{f(x_1)}$ érték adódik, vagyis sikerült megszerkesztenünk $f(x_1)$ ismeretében az $\frac{1}{f(x_1)}$

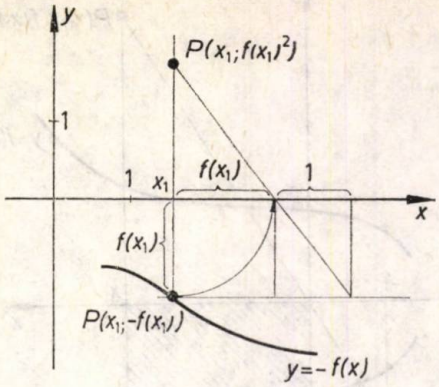


12. ábra

függvényértéket. A görbepontok szerkesztésének menete a 12. ábráról olvasható le.

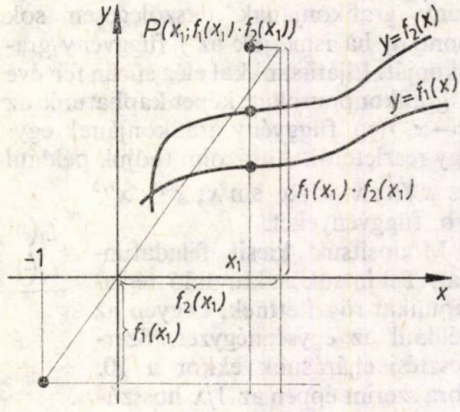
A 4. ábrán látható, hogy egy x_1 hosszúságú szakasz ismeretében az x_1^2 hosszúságú szakasz hogyan szerkeszthető. Legyen f továbbra is pozitív értékeket felvevő függvény! Alkalmazzuk a 4. ábrán látható eljárásunkat x_1 helyett $f(x_1)$ hosszúságú szakasszal. Ekkor $y = (f(x_1))^2$ adódik, vagyis sikerült megszerkesztenünk $f(x_1)$ ismeretében az $(f(x_1))^2$ függvényértéket. A görbepontok szerkesztésének menete a 13. ábrán látható. Tehát az f függvény grafikonjának ismeretében megszerkeszthetjük az f^2 függvény grafikonjának pontjait.

Végül nézzük meg még a 2. ábrán látható eljárásunk bizonyos fajta általánosítását. Legyen ismert most két, pozitív



13. ábra

értékeket felvevő függvény f_1 és f_2. Ha most a téglalap oldalainak $f_1(x_1)$-et és $f_2(x_1)$-et vesszük, akkor a téglalap területe $f_1(x_1) \cdot f_2(x_1)$, a megszerkesztett y szakasz hossza pedig $f_1(x_1) \cdot f_2(x_1)$. Az f_1 és f_2 függvények grafikonjának ismeretében sikerült megszerkeszteni az $f_1 \cdot f_2$ függvény egy adott grafikonpontját. A szerkesztés menete a 14. ábráról olvasható le.



14. ábra

Az f_1 és f_2 függvények grafikonjának ismeretében szerkeszteni tudjuk az $f_1 \cdot f_2$ szorzatfüggvény grafikonpontjait.

Eddigi példáinkban feltételeztük, hogy a szóban forgó függvényértékek pozitívak. Természetesen eljárásunk negatív függvényértékek esetén is alkalmazható, hiszen szakaszhosszakat szerkesztettünk

és ezek koordináta-rendszerbeli elhelyezésekor figyelembe tudjuk venni, hogy a függvényérték pozitív-e vagy pedig negatív.

A fentiekben megismert szerkesztési eljárások valamelyikét alkalmazva egy-egy függvény ábrázolására (elég sűrűn fölvéve a grafikonpontokat) a függvény grafikonjáról, vagy annak egy-egy részletéről sok függvény esetében közelítőleg helyes képet kaphatunk. Viszonylag egyszerű eszközökkel mód nyílik tehát tapasztalatok gyűjtésére, ezekből kiindulva pedig olyan sejtések megfogalmazására, amelyeket aztán az analízis eszközeivel precízen is bizonyíthatunk.

DR. MÁTYÁS FERENC—DR. MOLNÁR SÁNDOR
főiskolai adjunktus főiskolai adjunktus
Ho Si Minh Tanárképző Főiskola, Eger

A tanárképző főiskolák hallgatóinak 1986. évi matematikai tanulmányi versenye

A négy tanárképző főiskola (Eger, Nyíregyháza, Szeged, Szombathely), továbbá az ELTE Tanárképző Főiskolai Kara és a Janus Pannonius Tudományegyetem Főiskolai Kara matematikaszakos hallgatóinak 1986. évi tanulmányi versenye Egerben, a Ho Si Minh Tanárképző Főiskolán április 21-én és 22-én került megrendezésre.

A versenybizottság
elnöke: Hódi Endre, ny. osztályvezető (OPI);
titkára: Dr. Molnár Sándor, Ho Si Minh Tanárképző Főiskola;
tagjai: Kamarás Lajos, JPTE Tanárképző Kar;
Dr. Rozgonyi Tibor, Bessenyei György Tanárképző Főiskola;
Sebestyén József, Berzsenyi Dániel Tanárképző Főiskola;
Dr. Szepessy Bálint, Ho Si Minh Tanárképző Főiskola;
Dr. Szilassi Lajos, Juhász Gyula Tanárképző Főiskola;
Wintsche Gergely, ELTE Tanárképző Főiskolai Kar voltak.

A versenyfeladatok kiválasztását a versenybizottság elnöke végezte el, a főiskolák által javasolt feladatokból. Minden résztvevő intézményt öt hallgató képviselt. A kitűzött hét feladat megoldására április 21-én délelőtt öt óra állt a versenyzők rendelkezésére. Délután városnézés volt a program. A dolgozatok értékelésére április 21-én délután és 22-én délelőtt került sor. Ezt követően zajlott le az ünnepélyes eredményhirdetés.

A versenybizottság egyhangúlag a következő határozatot hozta:

I. díjat nyert: **Fritz Péter,** Berzsenyi Dániel TKF;
Mucsi Ferenc, ELTE Tanárképző Főiskolai Kar;

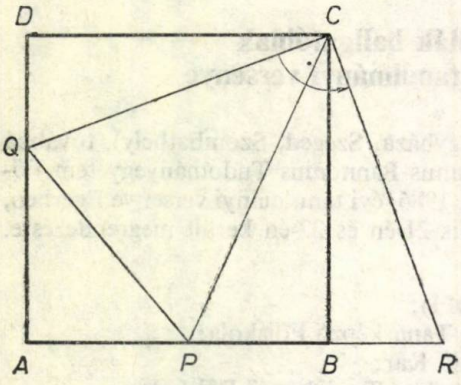
II. díjat nyert: **Vízvári Zsuzsa,** JPTE Tanárképző Kar;
Zsuponics László, Berzsenyi Dániel TKF;

III. díjat nyert: **Selyem Erika,** Juhász Gyula TKF;
Baski Ferenc, ELTE Tanárképző Főiskolai Kar;
Marosszéky Gábor, Ho Si Minh TKF;
Réti Éva, Berzsenyi Dániel TKF;
Csontos Alajos, Juhász Gyula TKF;
Pavela Károly, ELTE Tanárképző Főiskolai Kar.

Dicséretben részesült: **Berczeli Anikó,** ELTE Tanárképző Főiskolai Kar;
Kincses László, JPTE Tanárképző Kar;
Németh Gyula, Berzsenyi Dániel TKF;
Csóti Beáta, Juhász Gyula TKF;
Doffkai Frigyes, JPTE Tanárképző Kar;
Hevesi József, Juhász Gyula TKF;
Nagy Tibor, Bessenyei György TKF.

A Bolyai János Matematikai Társulat 700 forintos különdíját *Fritz Péter,* Berzsenyi Dániel TKF, 600 forintos különdíját *Mucsi Ferenc,* ELTE Tanárképző Főiskolai Kar, 400 forintos különdíját *Vízvári Zsuzsa,* JPTE Tanárképző Kar, 300 forintos különdíját *Zsuponics László,* Berzsenyi Dániel TKF nyerte.

A továbbiakban ismertetjük *a versenyfeladatokat és azok egy-egy lehetséges megoldását.*



1. ábra

1. feladat

Az $ABCD$ négyzet oldala egységnyi hosszú. Úgy választottunk az AB oldal belsejében egy P és az AD oldal belsejében egy Q pontot, hogy az APQ háromszög kerülete 2 legyen.

Bizonyítsuk be, hogy $PCQ\sphericalangle = \frac{\pi}{4}$!

Megoldás:

Forgassuk el C körül a CDQ háromszöget $+\frac{\pi}{2}$ szöggel! Ekkor a D pont a B pontba kerül, Q pont forgatottját jelöljük R-rel. Mivel a négyzet oldala egységnyi hosszú, valamint az APQ háromszög kerülete 2 egység, így igazak az alábbiak: Ebből

$$2 = PQ+PA+QA = AB+AD = AB+AQ+QD = AB+AQ+BR =$$
$$= AP+PB+AQ+BR = PR+AQ+AP.$$

$PQ=PR$ adódik, s ezért a $PQCR$ négyszög olyan deltoid, melynek C csúcsánál levő szögét a CP szimmetriatengely felezi. Mivel $RCQ\sphericalangle = \frac{\pi}{2}$, ezért $PCQ\sphericalangle = \frac{\pi}{4}$.

2. feladat

Adott k természetes számhoz határozzuk meg azt a legkisebb $n \geqq 1$ természetes számot, amelyre 2^k osztója (5^n-1)-nek!

Megoldás:

Ha $k=0$ vagy $k=1$, akkor az $n=1$ nyilvánvalóan eleget tesz a feltételeknek.

A továbbiakban legyen $k>1$. A legkisebb $n \geqq 1$ természetes számot, melyre $2^k \mid 5^n-1$ teljesül, bontsuk fel $n=2^p(2q+1)$ alakú szorzattá, ahol p és q természetes számok. Használjuk az

$$5^n-1 = 5^{2^p(2q+1)}-1 = (5^{2^{p-1}(2q+1)}-1)\cdot(5^{2^{p-1}(2q+1)}+1)$$

szorzattá bontást! Hasonlóan folytatva az

$$5^n-1 = (5^{2q+1}-1)\cdot(5^{2q+1}+1)\cdot(5^{2(2q+1)}+1)\cdot(5^{2^2(2q+1)}+1)\ldots(5^{2^{p-1}(2q+1)}+1)$$

egyenlőséghez jutunk. A jobb oldal első tényezője osztható 4-gyel, de nem osztható 8-cal, míg az összes többi tényezője osztható 2-vel, de nem osztható 4-gyel. Tehát 5^n-1 pontosan 2^{p+2}-vel osztható, és ezért $k=p+2$. Az $n=2^{k-2}(2q+1)$ természetes szám akkor lesz legkisebb, ha $q-0$, ezért a megoldás a $k>1$ esetben az $n=2^{k-2}$.

3. feladat

Legyen $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ és $\{c_i\}$ három olyan sorozat, amelynek elemei természetes számok! Bizonyítsuk be, hogy van olyan p és q index, amelyekre egyidejűleg teljesül az

$$a_p \geqq a_q, \quad b_p \geqq b_q \quad \text{és} \quad c_p \geqq c_q$$

egyenlőtlenség!

Megoldás:

Mivel $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ elemei természetes számok, így kiválasztható belőle egy $\{a_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nem csökkenő részsorozat. Tekintsük a $\{b_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot, s ebből is válasszunk ki egy nem csökkenő $\{b_{j_n}\}_{n=1}^{\infty}$ részsorozatot! Végül $\{c_{j_n}\}_{n=1}^{\infty}$-ből is válasszunk ki egy nemcsökkenő $\{c_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ részsorozatot! A konstrukció miatt

$$a_{k_1} \leqq a_{k_2} \leqq \ldots \; b_{k_1} \leqq b_{k_2} \leqq \ldots \; c_{k_1} \leqq c_{k_2} \leqq \ldots$$

Ezért pl. $q=k_1$ és $p=k_2$ a kívánt tulajdonságú indexek.

4. feladat

Ismeretes, hogy az Euler-féle φ számelméleti függvény definíciója:

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right), \quad \text{ahol} \quad n = p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$$

($p_1, p_2, \ldots, p_r$ törzsszámok; $k_1, k_2, \ldots, k_r$ pozitív egész számok).

Ugyancsak ismeretes a Dedekind-féle f számelméleti függvény definíciója is:

$$f(n) = n\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_r}\right).$$

Bizonyítsuk be, hogy $\varphi(n)+f(n)\geqq 2n$. Mely természetes számokra érvényes az egyenlőség?

Megoldás:

A φ, illetve az f függvények értelmezéséből — a szorzásokat elvégezve — a következő adódik:

$$\varphi(n)+f(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}-\ldots-\frac{1}{p_r}+\frac{1}{p_1p_2}+\frac{1}{p_1p_3}+\ldots+\frac{1}{p_{r-1}p_r}+\ldots+\right.$$

$$+(-1)^r\frac{1}{p_1p_2\cdots p_r}+1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_r}+\frac{1}{p_1p_2}+\frac{1}{p_1p_3}+\ldots+\frac{1}{p_{r-1}p_r}+\ldots+$$

$$\left.+\frac{1}{p_1p_2\cdots p_r}\right) = n\left(2+2\left(\frac{1}{p_1p_2}+\frac{1}{p_1p_3}+\ldots+\frac{1}{p_{r-1}p_r}+\frac{1}{p_1p_2p_3p_4}+\ldots\right)\right) \geqq 2n.$$

Egyenlőség nyilván akkor áll fenn, ha n prímhatvány, azaz p^k alakú.

5. feladat

Tekintsük a

$$T_n(x) = a_1 \sin(x+b_1)+a_2 \sin(x+b_2)+\ldots+a_n \sin(x+b_n)$$

trigonometrikus polinomot, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n$ adott valós számok!

Bizonyítsuk be, hogy ha $T_n(0)=0$, továbbá, ha van olyan, a π egész számú többszöröseitől különböző x_0, amelyre $T_n(x_0)=0$, akkor minden valós x-re: $T_n(x)=0$.

Megoldás:

A két szög összegének sinusára vonatkozó addíciós tétel felhasználásával $T_n(x)=$ $=A \sin x+B \cos x$ alakhoz jutunk, ahol

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i \cos b_i \quad \text{és} \quad B = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin b_i.$$

Mivel $T_n(0)=0$, ezért $B=0$, valamint $T_n(x_0)=0$, de $x_0 \neq k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$, ezért $A=0$. De akkor $T_n(x)=0 \sin x+0 \cos x \equiv 0$.

6. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha bármiképpen választunk is egy egységnyi sugarú gömb felületén 5 pontot, akkor ezek között mindig van két olyan, amelyeknek távolsága nem nagyobb $\sqrt{2}$-nél!

Megoldás:

Válasszunk ki az egységnyi sugarú gömb felületén 5 pontot, s ezeket jelöljük $A_1, A_2, \ldots, A_5$-tel! Vágjuk ketté a gömböt egy, a gömb O középpontjára illeszkedő, az OA_1 sugárra merőleges α síkkal! Ha van az A_1 pontot tartalmazó félgömbön a kiválasztott 5 pontból még legalább egy, akkor ennek A_1-től való távolsága kisebb mint $\sqrt{2}$, illetve pontosan $\sqrt{2}$, ha a pont az α által kimetszett főkörön van. Ezért ebben az esetben igaz a feladat állítása.

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a maradék 4 pont mindegyike az A_1-et nem tartalmazó félgömbön van! Jelölje ezen pontoknak az α-ra való merőleges vetületét A_2', A_3', A_4' és A_5'!

A borítón levő ábráról leolvasható, hogy

$$\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OA_i'} + \overrightarrow{A_i'A_i} \quad (i = 2, 3, 4, 5).$$

Az A_2', A_3', A_4' és A_5' az α sík 4 különböző pontja, így létezik olyan j, illetve k $(j \neq k$, $2 \leqq j, k \leqq 5)$ index, hogy az $\overrightarrow{OA_j'}$, illetve $\overrightarrow{OA_k'}$ vektorok szöge nem nagyobb, mint 90°, azaz $\overrightarrow{OA_j'} \cdot \overrightarrow{OA_k'} \geqq 0$. Másrészt

$$\overrightarrow{OA_j} \cdot \overrightarrow{OA_k} = (\overrightarrow{OA_j'} + \overrightarrow{A_j'A_j}) \cdot (\overrightarrow{OA_k'} + \overrightarrow{A_k'A_k}) =$$

$$= \overrightarrow{OA_j'} \cdot \overrightarrow{OA_k'} + \overrightarrow{OA_j'} \cdot \overrightarrow{A_k'A_k} + \overrightarrow{A_j'A_j} \cdot \overrightarrow{OA_k'} + \overrightarrow{A_j'A_j} \cdot \overrightarrow{A_k'A_k}.$$

A jobb oldal két középső tagja merőlegesség miatt nulla, míg a másik két tag nem negatív. Azaz $\overrightarrow{OA_j} \cdot \overrightarrow{OA_k} \geqq 0$, ami a skaláris szorzás definíciója szerint

$$\overrightarrow{OA_j} \cdot \overrightarrow{OA_k} = \left|\overrightarrow{OA_j}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OA_k}\right| \cdot \cos \alpha_{jk} \geqq 0$$

egyenlőtlenségre vezet. Az $|\overrightarrow{OA_j}|=|\overrightarrow{OA_k}|=1$ felhasználásával $\cos\alpha_{jk}\leqq 0$ adódik. Az $\overrightarrow{OA_j}$ és $\overrightarrow{OA_k}$ vektorok α_{jk} szöge nem nagyobb, mint 90°, ezért az A_j és A_k pontok távolsága nem nagyobb, mint $\sqrt{2}$. Ezzel állításunkat bizonyítottuk.

7. feladat

Legyen f olyan függvény, amelynek az $x=0$ hely egy környezetében $(n=1)$-ed rendű folytonos differenciálhányadosa van, és $f(0)=0$.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\frac{1}{k+1}f^{(k+1)}(0);\quad k=0,1,\ldots,n.$$

Megoldás:

Ha $k=0$, akkor definíció szerint, illetve a L'Hospital-szabály alapján állításunk teljesül.

Legyen a továbbiakban $0<k\leqq n$. A Leibniz-szabály felhasználásával a k-adik differenciálhányados:

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}f^{(k-i)}(x)\frac{i!}{x^{i+1}}=\frac{\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}i!f^{(k-i)}(x)x^{k-i}}{x^{k+1}}.$$

Mivel $f(0)=0$, ezért az $x=0$ helyen mind a számláló, mind a nevező határértéke 0. Alkalmazva a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(k+1)x^k}\sum_{i=0}(-1)^i\frac{k!}{(k-i)!}\left(f^{(k-i+1)}(x)x^{k-i}+(k-i)f^{(k-i)}(x)x^{k-i-1}\right).$$

Ebben az összegben a tagok — egy kivétellel — páronként zérust adnak, s marad:

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(k+1)x^k}f^{(k+1)}(x)x^k=\frac{1}{k+1}f^{(k+1)}(0).$$

Ezzel állításunkat bizonyítottuk.

MIKSA LAJOS
tanár
Általános Iskola, Etyek

Ismeretszerzés és alkalmazás az 5. osztályos Matematika-feladatrendszerekben

Néhány éve a matematika oktatásában megjelentek a *feladatrendszerek*. Mi a feladatrendszer? Az 5. osztályos Matematika-feladatrendszer szerzői azt írják, hogy a „tankönyvvel együtt használható, nem helyettesíti, csupán kiegészíti azt" ([1] 3. oldal). Ám nyilvánvalóan más és több, mint egy szokványos feladatgyűjtemény. Hol a helye az oktatáselméletben? Mi róla a gyakorló pedagógus véleménye?

Az oktatáselmélet a tanítás-tanulás

folyamatában durván négy nagy *szerkezeti* elemet különít el: az ismeretszerzést, az alkalmazást, a rendszerezést és az ellenőrzést. Az ismeretszerzés és alkalmazás a folyamatnak mintegy 80—85%-át teszi ki ([2] 30. és 167. oldal).

Adottnak elfogadva a struktúrát, felmerül a kérdés: mi hozza működésbe a szerkezetet, melyek a folyamat mozgatórugói? Elméleti szakemberek a tanítástanulás *funkcióiban* találták meg a választ. Ezek a következők: *motiválás, aktivizálás, differenciálás* ([3] 44. oldal).

Természetes, hogy a szerkezet és a funkció meghatározzák azokat a *formákat és szervezeti kereteket,* melyekben a folyamat végbemegy. Az osztálykereten belül a tanítás-tanulás történhet *frontális osztálymunkában, csoportmunkában* és *egyéni munkában.* A maga helyén és idejében mindegyik egyaránt hasznos és szükséges, ám az imént elsorolt formák sorrendben emelkedő szinteket mutatnak, mégpedig két szempontból: 1. az ismeretszerzés *önállósága* szerint, 2. az ismeretszerzés és az alkalmazás *egysége* alapján ([2] 177., 178. oldal).

A *módszerek* felől közelítve ugyancsak eljuthatunk az említett munkaformákig. A *hagyományosnak* mondott tanítás-tanuláshoz általában a *frontális osztálymunka* kapcsolható, az ún. *stratégiai* módszerek sorában találkozunk a *kiscsoportokba* szervezett és az *individualizált* tanulással. Nos, *ebbe a sorba tartozik a feladatrendszeres tanulás* is. Stratégiai jellege abban nyilvánul meg, hogy az átlagosnál jobb lehetőségeket biztosít a *funkciók* érvényesülése szempontjából, azaz módot kínál a tanulók motiválására, aktivizálására, differenciálására ([3] 133—146. oldal).

Végül még egy nézőpont az elméleti megközelítéshez. Nyilvánvaló, hogy a feladatrendszer alapvető eleme maga a *feladat.* Milyennek kell lennie? A pedagógiai pszichológia az *ismeretszerzés és az alkalmazás egységére* teszi a hangsúlyt, és az alábbi elveket ajánlja: 1. A feladatok *életszerűek* legyenek; a megoldáshoz szükséges adatokat ne nyújtsuk „preparálva". 2. Az ismeretek alkotó alkalmazásánál változatosan kapcsolódjon össze a *konkrét és absztrakt,* a *megismerés és cselekvés.* 3. Nem szabad elhanyagolnunk a tanulás automatizált komponenseit, a *készségek* fejlesztését sem ([4] 192—205. oldal).

Az elméleti kritériumok rendre felfedezhetők például az 5. osztályos Matematika-feladatrendszerekben. A könyv szinte kizárólag feladatokat tartalmaz (a számozott feladatok száma 1307), tehát formailag az ismeretszerzés és alkalmazás *teljes egységet* mutat benne. Lényeges különbség a tankönyvekkel összehasonlítva, mert azokban külön helyet kap az „elméleti rész", másutt találhatók a „gyakorlásra szánt feladatok", tehát — annak ellenére, hogy a tankönyv a *tanuló* munkaeszköze —, a *tanár* szervező és irányító munkájára van szükség, hogy a kettőt összekapcsolja. A feladatrendszer a diákot és a nevelőt is arra készteti, hogy az ismeretszerzést és az alkalmazást egységben lássa, mit több: e kettőt *csak együtt megvalósuló* eszköznek tartsa.

Ám a feladatrendszer *eltér a feladatgyűjteményektől* is annyiban, hogy (vastag betűs kiemeléssel) feltünteti a továbbhaladáshoz szükséges *új fogalmakat, szabályokat, összefüggéseket,* olykor csupán jelzésszerűen. Ez azonban nem baj, kimunkálásuk, megfogalmazásuk, elmélyítésük a gyerekek és a nevelő feladata marad. Ugyanez az önállóság érvényesíthető a szabályalkotás absztrakciós fokát illetően is: az értelmezés elvontsága és mélysége rugalmasan követheti a helyi viszonyokat. Megállapítható, hogy a Feladatrendszerek takarékosan bánik az új fogalmakkal, szabályokkal, összefüggésekkel; számuk mindössze 118, tehát nem jut minden órára egy új ismeret, és ezek többsége is a tanév első felében fordul elő, időt biztosítva megértésükre, alkalmazásukra.

A feladatok között nagy számban fordul elő *életszerű* helyzet, melyek jellemzője, hogy elterelő adatok, szokatlan kér-

dések nehezítik a sztereotíp sémák közvetlen alkalmazását. Olyan feladatokról van tehát szó, melyek megoldása — a pedagógiai pszichológia igényeinek megfelelően — *másodlagos absztrakciót* követel a tanulótól.

Cselekvéses tanulás fontosságára a könyv külön szimbólum segítségével hívja fel a figyelmet: T (tanulói tevékenység). Számuk 149, az összes feladat 11,4%-a igényli az ismeretszerzés és a cselekvés összekapcsolását.

A Feladatrendszerek ugyancsak külön jellel illeti a *frontális*, a *csoport-* és az *egyéni* munkára szánt feladatokat. Arányuk azt mutatja, hogy a könyv szerzői nagy fontosságot tulajdonítanak a *differenciált* tanulásnak, ezen belül az *egyéni* munkának:

Frontális munka (Fr):	30,7%.
Csoportmunka (Csm):	18,1%.
Egyéni munka (Em):	51,2%.

Ám differenciáltak a feladatokba foglalt *követelmények* is. A könyv alapvetően *három szintet* különböztet meg (könnyebb, felzárkóztató feladatok, átlagos feladatok, optimális követelményeket tartalmazó feladatok), de nagyobb teret szán azoknak a példáknak, melyek mindhárom fokozatot együtt tartalmazzák, azaz a gyengébb, a közepes és a jó tanulók különböző szintekig eljuthatnak a feladat megoldásában. Ugyanígy, magas arányban képviseltetik magukat a könnyebb, felzárkóztató feladatok. Nézzük az összes feladathoz viszonyítva mindezt százalékosan:

Átlagos feladatok:	3,6%.
Optimális követelményeket tartalmazó feladatok:	10,6%.
Könnyebb, felzárkóztató+átlagos feladatok:	12,5%.
Átlagos+optimális feladatok:	14,7%.
Könnyebb, felzárkóztató feladatok:	19,8%.
Könnyebb, felzárkóztató+átlagos+optimális feladatok:	38,6%.

A könyv szintén megkülönbözteti azokat a feladatokat, amelyek feldolgozását a szerzők *feltétlenül* javasolják (nem azonosak a minimális követelményt tartalmazó feladatokkal). Ezek a feladatok egy *meghatározott feldolgozási sorrendet* követnek, nagyobb gondolatmenet közbülső lépcsőfokait. A többi feladat célja a gyakorlás, a törzsanyag elmélyítése, ismétlés, kiegészítés stb. A feltétlenül megoldandó feladatok aránya 19,3%. (Összehasonlításul: a *tanterv* a törzsanyag feldolgozására az összes óraszám 68,75%-át veszi igénybe.) Mindenesetre úgy tűnik, hogy a Feladatrendszerek szerzői megfontolták azt a régóta hangoztatott tanári igényt, amely szerint kevés idő jut gyakorlásra, készségfejlesztésre.

Hogyan összegezhetnénk a tapasztalatokat a *gyakorló pedagógus* szemszögéből? A Feladatrendszerek legfőbb erényét abban látom, hogy *egyetlen munkaeszköz* segítségével vonja be a folyamatba a pedagógust és a diákot, közvetlenül egyesíti az oktatás két oldalát, a tanítást és a tanulást. A tankönyv — hangsúlyozottan — a diákhoz szól, mintegy kiiktatja a pedagógust, majd külön *kézikönyv* segítségével vezetik vissza a nevelőt az oktatási folyamatba. A Feladatrendszerek szimbólumai segítségével konkrét és gyakorlati útmutatást ad a tanulás szervezésére, irányítására; akár kézikönyvet is pótolhatna.

Tehát ez lenne az egyik, amelyet a gyakorlat embere a kezéhez adott munkaeszköztől elvár: a lehetőség szerint minden lényeges információt találjon egy helyen. Másik követelmény, hogy a könyv jól kezelhető legyen. Harmadszor: orientáljon a legkorszerűbb és leghatékonyabb pedagógiai elvek alkalmazásának irányába. Egyesítse — feladataiban — az elméletet és gyakorlatot; a feladatok tartalmazzanak motivációs energiát. Végül pedig: meglegyen a lehetőség a folyamatos és rendszeres visszajelentésre.

Úgy vélem, hogy az 5. osztályos Mate-

matika-feladatrendszerek nagyjából és egészében megfelel a fenti követelményeknek. Partnernek tekinti a szaktanárt és nem egyszerű végrehajtónak.

IRODALOM

[1] DR. HAJDU SÁNDOR (szerk.): *Matematika-feladatrendszerek, 5. osztály.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.

[2] NAGY SÁNDOR: *Az oktatáselmélet alapkérdései.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

[3] BÁTHORY ZOLTÁN: *Tanítás és tanulás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.

[4] KELEMEN LÁSZLÓ: *A pedagógiai pszichológia alapkérdései.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.

DR. NAGYNÉ DR. SZILVÁSI MÁRTA
egyetemi adjunktus
Budapesti Műszaki Egyetem

A térgeometria tanítását segítő programokról

A Novotrade forgalmazásában a boltokba került „Axonometria", illetve „Perspektíva" néven két darab C—16 és C/plus4 számítógépre készített 3D geometriai oktatóprogram. Ezáltal a matematikának egy olyan területén találhatnak szoftvert e gépek tulajdonosai, ahol a legszegényebb a piac kínálata. A térgeometriai problémák megoldására ugyanis a mikroszámítógépek elsősorban az adatrendszerek mérete miatt nem alkalmasak.

Az Axonometria és a Perspektíva programok szerzői, Soós Gábor és Szilassi Lajos bravúros ügyességgel oldották meg, hogy a számítógépi geometria alapját, a térbeli alakzatok definiálását és megjelenítését a legkisebb gépek használói is megismerjék.

Az Axonometria program az általános iskola 8. osztályos tanulóinak és a középiskolásoknak javasolható. Használatához a háromdimenziós koordinátarendszer ismerete szükséges. Legfeljebb 20 darab pont koordinátáinak és az ábrázolni kívánt szakaszok végpontjai sorszámának megadásával egy térbeli alakzat drótvázát definiálhatjuk, amelynek ortogonális axonometrikus vetületei jelennek meg a képernyőn. A program sok szolgáltatást nyújt könnyen kezelhető módon. Módosíthatók maguk az alakzatok, a térbeli helyzetük és a vetítés iránya. A kezdők számára mintaalakzatok adatrendszerei tölthetők be a kazettáról.

A Perspektíva programra elsősorban a rajztanárok figyelmét szeretném felhívni. Ezzel a programmal is poliéder drótvázát definiálhatjuk ugyanúgy, mint az Axonometria programmal, amelynek most perspektív vetületeit készíttethetjük el. Jól tanulmányozhatók a centrális leképezés tulajdonságai és a vetület megváltozása a centrum helyzetétől függően. A program elsősorban középiskolásoknak javasolható, de a felsőoktatási intézményekben ábrázoló geometriát tanulók is jó hasznát vehetik ennek a programnak.

A térszemlélet fejlesztésének jó eszközei a fenti programok. Ismert módon éppen a térszemlélet hiánya teszi keservessé és emiatt sok iskolában mellőzötté a térgeometriai feladatok tárgyalását. A hagyományos demonstrációs eszközök mellett most a számítógép ad segítséget tanároknak, szülőknek és tanulóknak a térlátás képességének fejlesztéséhez. Sok örömet nyújtanak ezek a programok mindazoknak, akik szeretik a térformákkal való alkotó játékot.

DR. SCHARNITZKY VIKTOR
tanszékvezető főiskolai tanár
Könnyűipari Műszaki Főiskola, Budapest

Matematikus vándorgyűlés Nyíregyházán

A Bolyai János Matematikai Társulat az 1986. évi (sorrendben a huszonhatodik) Rátz László Vándorgyűlését Nyíregyházán rendezte meg 1986. július 3-a és július 6-a között a Bessenyei György Tanárképző Főiskolán.

A vándorgyűlést **Surányi János,** a Bolyai János Matematikai Társulat tiszteletbeli elnöke nyitotta meg, majd **Gyúró Imre,** a Szabolcs-Szatmár Megyei Tanács elnökhelyettese köszöntötte a résztvevőket.

A plenáris ülés első részében az 1986. évi *Beke Manó Emlékdíjakat* adták át. A Beke Manó Emlékdíj Bizottság határozata értelmében a Bolyai János Matematikai Társulat 1986-ban a

Beke Manó Emlékdíj I. fokozatával tüntette ki

Dr. Kántor Sándorné Dr. Varga Tündét, a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Geometriai Tanszékének adjunktusát.

A Beke Manó Emlékdíj II. fokozatát kapta:

Bartha Gábor, a szentendrei Móricz Zsigmond gimnázium tanára;
Bige Istvánné, a budapesti 21. sz. Katona József Szakközépiskola és Szakmunkásképző Intézet tanára;
Czigány Tiborné, a budapesti Köztársaságtéri általános iskola tanára;
Kövesdi József, a rakamazi általános iskola tanára, a Szabolcs-Szatmár megyei általános iskolák alsó tagozatos vezető szakfelügyelője;
Szabó Sándorné, a budapesti 21. sz. Katona József Szakközépiskola és Szakmunkásképző Intézet tanára.

A plenáris ülés második részében **Rácz András** *Pólya György élete és munkássága* című (az előadás szövege megjelent a *Magyar Tudomány* 1986. évi első számában a 72—80. oldalakon), majd **Recski András** *Gráfelméleti algoritmusok és műszaki alkalmazásuk* című előadása hangzott el.

A vándorgyűlés többi napján a munka négy szekcióban folytatódott, de néhány előadás több szekció közös rendezvénye volt.

Az alsó tagozatos szekcióban elhangzott előadások:

Csonka Csabáné: *Az alsó tagozatos matematikaoktatás korrekciója;*
Nemetz Tibor: *Valószínűségi szemlélet alakítása 6—10 éves korban;*
Kovács Csongorné: *Az alsó tagozatos munka — felsős szemmel;*
Imrecze Zoltánné: *Nyitott mondat 1—2.* Videoműsor és megbeszélés.

Az alsó tagozatos feladatmegoldó szemináriumot **Olasz Tamásné, Popovics Katalin** és **Suták Mihályné** vezette.

Az előadások közben jutott idő a tantervi korrekció megbeszélésére is.

A felső tagozatos szekcióban a következő előadásokat hallgathatták meg a résztvevők:

Kiss Sándor: *Bizonyítási képesség fejlesztése a 7., 8. osztályban. Tehetséggondozás;*
Filep László: *Miben segítheti a matematika története a matematika oktatását?*
Czeglédy István: *Matematikai fogalomrendszer;*
Szalontai Tibor: *A felzárkóztatás néhány módszertani, tantárgypszichológiai kérdése;*

Szeredi Éva: *Érdemes-e játszani a matematikaórákon? I.—II.;*
Boroska Miklós: *Szaktanteremben eredményesebben tudok tanítani.*

A felső tagozatos feladatmegoldó szemináriumot **Hegyvári Norbert** és **Lajos Józsefné** vezette.

A középiskolai szekcióban a következő előadások hangzottak el:

Urbán János: *A matematikatanítás, a zsebkalkulátorok és a személyi számítógépek kapcsolata;*
Pintér Lajos: *Érdekes feladatok a középiskolai analízis órákra;*
Kálmán Attila: *A kreativitáskutatás elmélete és gyakorlata;*
Győri Kálmán: *Újabb eredmények a diophantikus egyenletek elméletében;*
Thiry Gyula: *Mi van a számítógép belsejében?*

A középiskolai feladatmegoldó szemináriumokat **Láng Hugó** *(Szélsőérték feladatok)*, **Pintér Ferenc** *(Amerikai verseny)*, **Rácz János** *(Elemi geometria)* vezették.
Az Informatikai Bizottság délutánját **Török Turul** és **Székely Jenő** vezette.

A felsőoktatási szekció az alábbi előadásokat tűzte programjára:

Iszály Ferenc: *A személyi számítógépek alkalmazási lehetőségei a felsőoktatásban;*
Bárdné Feind Teréz: *Geometriai alapok az építészmérnöki ábrázoláshoz;*
Czétényi Csaba: *Matematikaoktatás a Kereskedelmi és Vendéglátóipari Főiskolán.*

Az előadások közötti szünetek és a szabad idő módot nyújtott arra, hogy a résztvevők szakmai eszmecseréket is folytassanak.

A 420 résztvevő a szakmai programokon kívül három kirándulás (Túristvándi — Kölcse — Szatmárcseke; Vaja — Nyírbátor; hajókirándulás a Felső-Tiszán) egyikén vehetett részt, továbbá egy hangulatos vacsora élményével gazdagodott.

Az 1987. évi vándorgyűlést a Társulat előreláthatólag Zalaegerszegen rendezi meg.

DR. SCHARNITZKY VIKTOR
tanszékvezető főiskolai tanár
Könnyűipari Műszaki Főiskola, Budapest

Műszaki főiskolák tanárainak tanácskozása

A műszaki főiskolák és a műszaki egyetemek főiskolai karai matematikát, fizikát és számítástechnikát oktató tanárainak 1986. évi országos tanácskozását a Bánki Donát Gépipari Műszaki Főiskola rendezte meg 1986. augusztus 25-én, 26-án és 27-én Budapesten. A tanácskozáson 17 főiskola 84 oktatója vett részt, közöttük 6 külföldi vendég.

A tanácskozást **dr. Pomázi Lajos,** a BDGMF főigazgatója nyitotta meg és **dr. Földiák Gábor** művelődési miniszterhelyettes mondott bevezető előadást, amelyben méltatta az eddigi konferenciák jelentőségét. A plenáris ülésen **dr. Farkas Miklós** egyetemi tanár *A matematika a műszaki felsőoktatásban,* **dr. Sándori Mihály** a műszaki tudományok kandidátusa *A számítástechnika fejlesztési irányai és módszerei* és **dr. Gyulai József** egyetemi tanár *Mikroelektronikai technológiák* címmel tartott előadást. A továbbiakban még 7 előadás hangzott el, és valamennyit vita követte. Az előadások elsősorban a számítástechnikának az oktatás korszerűsítésében játszott szerepével foglalkoztak, de szó esett a matematika és a világnézeti nevelés kapcsolatáról, valamint szakmódszertani kérdésekről is.

Jó ötletnek bizonyult a poszter-szekció megszervezése. Ennek keretében az előadók egyrészt táblákra kiállíthatták kutatásaik eredményeinek vagy módszerei-

nek írásbeli összefoglalását, másrészt ezeket néhány percben bemutathatták (tévén keresztül) a plenáris ülés résztvevőinek, akik azután az őket érdeklő témák szerzőivel megbeszéléseket folytathattak. Összesen 21 posztert mutattak be és vitattak meg. A tanácskozást videó- és programbörze egészítette ki.

SZABÓ TIHAMÉR
mérnök-tanár
I. István Ipari Szakközépiskola, Esztergom

A középfokú matematikaoktatás néhány problémája

A középfokú oktatás jelentős változások előtt áll. E változások szükségességét társadalmi fejlődésünk kívánja meg. Oktatáspolitikánk egyik sarkalatos pontja a középfokú képzés problematikájának mielőbbi megoldása.

Napjaink feladatai közé tartozik a technikusképzés bevezetése a szakközépiskolák jelentős részébe. A szakmunkásképzés színvonalának emelését célozza többek között az a terv, hogy a képzés részben szakközépiskolai szinten folyjon stb.

A dinamikusan előremutató társadalmi célokat csak úgy érhetjük el, ha a képzés színvonalának emelésével konvertálható tudással rendelkező szakembereket bocsátunk ki, akik nemcsak megismerni, de megújítani is képesek korunk tudományát, technikáját.

Ahhoz, hogy eleget tudjunk tenni a megnövekedett követelményeknek, ismernünk és alkalmaznunk kell a neveléstudomány legújabb eredményeit. Az előrelépés feltétele: az eddigi eredmények kritikáján alapuló új módszerek kidolgozása.

A fenti indokok alapján választottam vizsgálatom tárgyául a középfokú képzés három frekventált iskolatípusát: a gimnáziumot, a szakközépiskolát és az ipari szakmunkásképzőt.

Vizsgálatom célja: e három képzési formában részt vevő tanulók divergens produktivitásának összehasonlító analízise. A teljes vizsgálati anyagból itt elsősorban a matematika és az egyéb vizsgált komponensek viszonyát elemzem a levonható konzekvenciákkal együtt.

Az elemzés kiterjed:

1. a gondolkodás folyamatának analízisére,
2. a divergens gondolkodás mutatóinak mérésére,
3. az IQ és a matematikateljesítmény közötti összefüggések elemzésére,
4. a matematika és a divergens mutatók közötti kapcsolatok vizsgálatára.

A populációból való kiválasztásnál ügyeltem arra, hogy az lehetőleg az iskolai átlagot reprezentálja.

Mindhárom iskolatípusban a második évfolyamos korosztályt (átlagéletkor 16 év) vontam vizsgálatom körébe.

A szakmunkástanulók autószerelői, a szakközépiskolások híradástechnikai, a gimnazisták „idegen nyelvre" specializálódott osztályt képviselnek.

Mindhárom csoport kizárólag fiúkból áll. A populációból 20—20 fős mintát választottam ki elemzés céljára. A szűkre szabott terjedelem miatt nem térhetek ki a vizsgálat körülményeinek és lefolyásának részletes ismertetésére, ezért csupán az eredményeket közlöm a levonható konklúziókkal együtt.

1. *Gondolkodási struktúra analízise*

A tanulók három — különböző nehézségi fokú — feladatot oldottak meg „egyéni ülésben". A megoldás során mértem: a feladatmegoldás idejét, a lépésszámot, valamint rögzítettem a feladat megoldására vonatkozó kezdeti, és az egyes lépések utáni megoldási hipotéziseket.

A kezdeti információk feldolgozása — orientációs bázis kiépítése.

Az orientációs bázis kiépítésének aránya a gimnáziumi tanulóknál a legmagasabb (40%), ezt követi a szakközépiskolások (20%) és a szakmunkástanulók eredménye.

A gimnáziumi és szakmunkástanulók eredménye között szignifikáns a különbség ($r_s=0{,}4236$, $p<0{,}05$). Hasonlóan szignifikáns a különbség a gimnazisták és a szakközépiskolai tanulók eredménye között is ($r_s=0{,}4011$, $p<0{,}05$).

A szakközépiskolai és szakmunkástanulók eredménye nem mutat szignifikanciát ($r_s=0{,}1012$, $p>0{,}05$).

A fenti adatok alapján feltételezhetjük, hogy a gimnazisták „problémaérzékenysége" a legerősebb, problémalátó képessége a legfejlettebb.

2. *Megoldási átlagidő*

A három feladat megoldási átlagideje az alábbiak szerint alakul:

gimnáziumi tanulók: 10,4 perc,
szakközépiskolai tanulók: 14,7 perc,
szakmunkástanulók: 21,7 perc,

A szakközépiskolai és gimnáziumi tanulók megoldási ideje szignifikánsan különbözik, negatív korreláció mellett ($r_s=-0{,}4697$ $p<0{,}05$), a szakközépiskolai és szakmunkás tanulók eredménye nem szignifikáns ($r_s=-0{,}1740$ $p>0{,}05$), az ipari tanulók és gimnazisták eredményei szignifikáns különbséget jeleznek ($r_s=0{,}4856$ $p<0{,}05$). A gimnazisták lényegesen jobb eredményei részben az 1-es pontban foglaltakkal magyarázhatók.

3. *Átlagos megoldási lépésszám*

A három feladat megoldásának átlagos lépésszáma:

gimnáziumi tanulók: 12,9 lépés,
szakközépiskolai tanulók: 14,7 lépés,
szakmunkástanulók: 21,3 lépés.

A szignifikancia értékek:

szakmunkástanulók, szakközépiskolai tanulók:
$r_s=0{,}4682$ $p<0{,}05$,
gimnáziumi tanulók, szakközépiskolai tanulók:
$r_s=0{,}1764$ $p>0{,}05$,
szakmunkástanulók, gimnáziumi tanulók:
$r_s=0{,}8909$ $p<0{,}05$.

A szakmunkástanulók szignifikánsan magasabb lépésszáma a következőkkel magyarázható: a feladatmegoldáshoz kapott bevezető információk szolgáltatta orientációs pontokat a populáció kis százaléka képes felfogni és feldolgozni, ennek következtében nehezen tájékozódnak a feladat struktúrájában „esetlegesen" tesznek lépéseket a megoldáshoz vezető úton.

A jelek információtartalmát, illetve az azok közötti összefüggéseket csak részben dolgozzák fel. Analizáló képességük fejletlen, az absztrakciós szint alacsony.

4. *A matematikai teljesítmény* és a feladatmegoldás *lépésszáma közötti* összefüggés.

A három csoport második osztályban mutatott matematika átlageredményei:

gimnáziumi tanulók: 3,4,
szakközépiskolai tanulók: 2,8,
szakmunkástanulók: 2,8.

A matematika-teljesítmény és a megoldási lépésszám között nem találunk kapcsolatot sem a gimnáziumi ($r_s=-0{,}4078$ $p<0{,}05$), sem a szakközépiskolai ($r_s=-0{,}2187$ $p>0{,}05$) tanulóknál.

A szakmunkástanulóknál gyenge pozitív kapcsolatot feltételezhetünk (r_s=0,3897 p>0,05).

5. *A matematikai teljesítmény és a megoldási idő kapcsolata*

A kapcsolat a két paraméter között nem mutatható ki, a korrelációk igen gyenge negatív értékek.

szakközépiskolai tanulóknál: $r_s=-0{,}3082$ $p>0{,}05$,
gimnáziumi tanulóknál: $r_s=-0{,}09962$ $p>0{,}05$,
szakmunkástanulóknál: $r_s=-0{,}06315$ $p>0{,}05$.

6. *Az IQ mérési eredményei és kapcsolata a matematikával*

Az IQ átlagértéke a három csoportnál: (Cattel teszttel mérve)

gimnáziumi tanulók: IQ 123,6,
szakközépiskolai tanulók: IQ 114,7,
szakmunkástanulók: IQ 115.

Az IQ átlagértéke mindhárom csoportnál az „átlagos IQ övezet" fölött helyezkedik el.

A három csoport IQ átlagszintjeit összehasonlítva azok között szignifikáns különbséget nem találunk.

szakmunkástanulók és gimnáziumi tanulók: $r_s=0{,}0229$ $p>0{,}05$,
szakközépiskolai tanulók és gimnáziumi tanulók: $r_s=0{,}2812$ $p>0{,}05$,
szakmunkástanulók és szakközépiskolai tanulók: $r_s=-0{,}2406$ $p>0{,}05$.

Az adatokból arra következtethetünk, hogy a képzés eddigi szakasza a konvergens gondolkodás fejlesztését helyezte előtérbe, a csoportok közötti különbségek hiányából pedig arra, hogy a tanulók közel hasonló értelmi képességekkel kerültek a középfokú intézményekbe.

Az IQ és a matematika a szakmunkástanulóknál nem szignifikáns (r_s=0,04394 p>0,05). A korreláció rendkívül gyenge, tehát feltételezhető a két paraméter teljes függetlensége. Szakközépiskolásoknál sem találunk szignifikáns kapcsolatot (r_s= =−0,01312 p>0,05), a korreláció igen gyenge és negatív. A gimnáziumi tanulóknál a kapcsolat szignifikáns (r_s=0,4438 p<0,05) közepesen erősnek mondható pozitív korreláció mellett.

A gimnazisták eredménye alátámasztja azt a feltételezést, hogy a jelenlegi gimnáziumi oktatás nem teljesen mentes az intelligencia központúságtól.

7. *A kreativitás mért értékei*

A figurális kreativitás mérésére a Torrance-féle tesztet alkalmaztam.

A mérési eredmények:

	fluencia	flecibilitás	originalitás	elaboráció
szakközépiskolai tanulók	8,8	6,6	21,5	9,4
gimnáziumi tanulók	17,0	12,7	21,2	10,5
szakmunkástanulók	8,8	6,6	21,5	9,4

A matematika kapcsolata a kreativitással — gimnáziumi tanulóknál

	fluencia	flexibilitás	originalitás	elaboráció
matematika	r_s=0,6063	r_s=0,4389	r_s=0,4146	r_s=0,3074
	s.	s.	ns.	ns.
	$p>0{,}05$	$p>0{,}05$	$p>0{,}05$	$p>0{,}05$

A matematikának a fluenciával szignifikáns a kapcsolata közepesen erős pozitív korreláció mellett. A flecibilitással és originalitással való kapcsolata ugyancsak szignifikáns, a közepesen erősnek mondható korrelációk miatt, függetlenségről így nem beszélhetünk.

Az originalitás és a flexibilitás korrelációs értékei magasabbak mint a másik két vizsgált csoportnál, következésképpen feltételezhetjük, hogy a gimnáziumi matematikaoktatás többet tesz, illetve tehet a kreatív problémamegoldás fejlesztésében. A szakmunkástanulóknál a két paraméter kapcsolata:

	fluencia	flexibilitás	originalitás	elaboráció
matematika	$r_s=0{,}2248$	$r_s=0{,}1766$	$r_s=0{,}1278$	$r_s=-0{,}0842$
	ns.	ns.	ns.	ns.
	$p>0{,}05$	$p>0{,}05$	$p>0{,}05$	$p>0{,}05$

A matematika-teljesítmény a kreativitással nincs szignifikáns kapcsolatban. A korrelációk gyengék, tehát viszonylagos függetlenséget feltételezhetünk. Ez a függetlenség egyben megfogalmazza az oktatás feladatait is, hiszen a matematikaoktatásban nemcsak a konvergens gondolkodásnak van szerepe, de feltétlenül érvényesülnie kell a kreativitásnak is. (Az originalitás korrelációs értékének alacsony volta különösen figyelmeztető lehet!)

A szakközépiskolai tanulók eredményei:

matematika	fluencia	flexibilitás	originalitás	elaboráció
	$r_s=0{,}2469$	$r_s=0{,}2610$	$r_s=0{,}18007$	$r_s=0{,}0684$
	ns.	ns.	ns.	ns.
	$p>0{,}05$	$p>0{,}05$	$p>0{,}05$	$p>0{,}05$

A matematikai teljesítmény és a kreativitás között nem találunk szignifikáns kapcsolatot. A korrelációk ugyan pozitívak, de gyengék, tehát feltételezhetjük a két mutató függetlenségét egymástól.

Az eredmények — hasonlóan a szakmunkástanulókéhoz — annak igényét vetik fel, hogy a divergens produktivitást itt is intenzívebben kell fejlesztenünk. A kísérlet számszerű eredményei után röviden igyekszem összefoglalni azokat a legfontosabb elveket, amelyek gyakorlati alkalmazása nélkülözhetetlen a problémamegoldó gondolkodás fejlesztése szempontjából.

A probléma általában kérdés, illetve kérdések formájában fejeződik ki. A problémamegoldás akkor kezdődik, amikor a gondolkodás sima lefolyása akadályokba ütközik. A tanuló — a tanítási órán, de azon kívül is — gyakran teszi fel a kérdést: „miért?", „hogyan?".

Sajnos, az iskola inkább a megszerkesztett problémák elé állítja a tanulót, mintsem a keresés, illetve a probléma feltárása elé. A kialakított sablonok éppenhogy gátlóivá válnak a probléma keresésének, feltárásának.

A problémamegoldás titka nem annyira a megoldás folyamatában, mint inkább a probléma meglátásában van. (Ezt a megállapítást nemcsak vizsgálati eredményeim támasztják alá, de más hazai és külföldi kutatók is hasonló megállapításokat tesznek.)

Olyan problémahelyzetet, szituációt kell kialakítanunk, amelynek ismeretlen elemei kiváltják a megismerés iránti érdeklődést, és azt a szükségletet, amelynek hatására a tanuló kifejti azt a tevékenységet, amely nélkülözhetetlen a problémahelyzet megoldásához.

A problémahelyzetek kialakítása, a problémahelyzetekkel való dúsítás szintje persze sok tényező függvénye (a pedagógus jártassága a problémafelvető oktatásban, a tananyag tartalma, a tanulók megismerési önállóságának szintje stb.).

A gondolkodásra nevelésnek fontos alapja a tanulók kíváncsiságának felkeltése és kiaknázása, illetve megfelelő élményanyaggal való feltöltése.

Alapvetően fontos a tanár kérdés-kultúrájának magas szintje ahhoz, hogy megfelelően tudja irányítani a tanulókat abban, hogy maguk keressék a választ feltett kérdésükre.

Az oktatás és nevelés minden színterét fel kell használnunk ahhoz, hogy a tanulókban kifejlesszük a problémák

iránti érzékenységet, ráirányítsuk figyelmüket a fontos jelenségekre, a jelenségek és tények közötti összefüggések keresésére. Ne hagyjuk lankadni kísérletező kedvüket, inspiráljuk tanulóinkat hipotézisek megalkotására, illetve azok módosítására!

A játék öröme nemcsak a gyermek, de a serdülő, ill. felnőtt korban is komoly inspiráló erő, amely újabb felfedezésekre ösztönzi a tanulókat. Ennek gyakorlati megvalósításában a számítógépek beláthatatlan lehetőségeket nyújtanak.

Feltételezhetjük, hogy minden tanuló lehet valamiben alkotó. Az alkotóképességeket lehet fejleszteni, de ezek csorbát szenvedhetnek akkor, ha nem találnak megfelelő táptalajra.

A tudományos tevékenység mintájára felépített tanulás a megismerési kíváncsiság felébresztésével, a problémák megoldása folyamán előforduló döntési helyzetekben kifejtett intellektuális erőfeszítés kialakításával, a munkában való kitartást közvetetten motiváló buzdítással, a megoldások során jelentkező sikerélmény verejtékmentes jellegével érhető el.

A jól felépített problémamegoldó oktatásban a tanulók korábban kialakult képességei, készségei kibontakoznak, ismereteik bővülnek. A gyakorlati és elméleti problémák megoldására alkalmazott stratégiák lépésről lépésre tökéletesednek és a problémamegoldás általános módszereivé válnak. Azzal, hogy a tanulók a problémamegoldás folyamatában gondolkodnak, egyben tanulnak is, és elsajátítják a heurisztikus okfejtés módját. Gondolkodásuk plasztikusabbá, rugalmasabbá válik.

Az azonos típusú, de különböző nehézségi fokú problémák megoldása során a tanulók transzfer-hatás révén sajátítják el a megoldáshoz vezető általános eljárásokat, illetve bizonyos feladattípusoknál alkalmazható megoldási algoritmusokat.

Az eltérő típusú feladatok megoldása folyamán kialakul az ismert fogalomrendszer általánosításának képessége, s ennek következményeként a kreatív gondolkodás lényeges tényezője, a rugalmasság is fejlődik.

A problémahelyzeteket természetesen úgy kell megkonstruálnunk, hogy az életkornak megfelelő értelmi fejlettségi szintet figyelembe véve a legközelebbi fejlődési zóna irányában fokozatosan nehezedők legyenek.

A matematika, de bármely más műszaki vagy társadalomtudományi tantárgy is jó lehetőséget ad a bizonyítás-cáfolás, érvelés gyakorlására.

A bizonyítás és cáfolás képességének fejlesztésére a problémamegoldásokon túlmenően a különféle típusú didaktikai feladatok megoldása alkalmas.

A jelenlegi oktatásban — sajnos, domináns jelenség — a példák megoldását követően kerül sor az elért eredmények bizonyítására.

Emiatt a tanulási tevékenység szabályozásában éppen az a láncszem a leggyengébb, amely az elért teljesítmény értékeléséhez, megítéléséhez szükséges értékítélet-rendszer kialakításához a pedagógus irányításával támpontokat adhatna.

A bizonyítás-cáfolás, érvelés gyakorlása az intellektuális és gyakorlati problémahelyzetekben észrevétlenül vezethet el az értelmi-erkölcsi értékítéletek kialakulásáig.

Az alkotó produktumhoz, az új felfedezéséhez a konvergens gondolkodás fejlesztése nem elégséges, ehhez a divergens stílus fejlesztése is nélkülözhetetlen.

Kísérletek bizonyítják, hogy a divergens és a logikai tényezők nem egymásnak ellentmondó, hanem komplementer jelenségek, együttes fejlesztésük fontos.

A jelenlegi oktatási rendszerben elsősorban a konvergens gondolkodás preferálása dominál.

A problémamegoldó gondolkodás fejlesztésében a matematika szerepe óriási lehet, de csak akkor, ha konzekvensen alkalmazzuk a neveléstudomány legújabb eredményeit.

IRODALOM

BARKÓCZI—ZÉTÉNYI: *A kreativitás vizsgálata.* Módszertani füzetek. kiadó Bp. 1981.
KÁLMÁNCHEY M.: *A kreativitás fejlesztésének néhány elméleti és gyakorlati kérdése.* kiadó Debrecen, 1981.
LÉNÁRD F.: *Képességek fejlesztése a tanítási órán.* Tankönyvkiadó, Bp. 1982.
TORRANCE, E. P.—MYES, R. E.: *Creative learning and teaching.* New York, 1972.

SZTRÓKAYNÉ FÖLDVÁRI VERA
tanár
Szinyei Merse Pál Gimnázium, Budapest

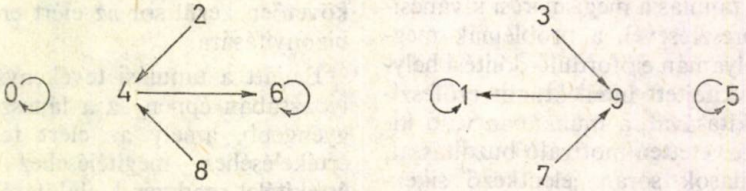
Érdekességek a hatványok végződéseivel kapcsolatban

Jó néhány évvel ezelőtt Varga Tamás hívta fel figyelmemet arra a szép szimmetriára, ami a négyzetszámok végződéseivel kapcsolatban figyelhető meg.

Jelentse a nyíl a következőt:

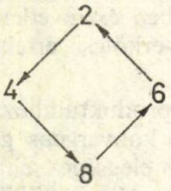
az ilyen számjegyre végződő szám négyzete → ilyen számjegyre végződik

Így a következő szép, szimmetrikus ábrához jutunk:

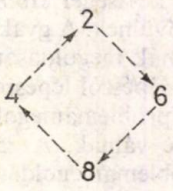


Ez a szimmetria adta az ötletet az alábbi vizsgálatokhoz. Figyeljük most azt, hogyan végződnek sorban, egymás után a kettő majd a nyolc hatványai!

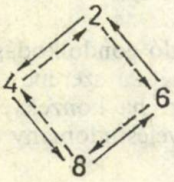
A kettő hatványainak végződései:



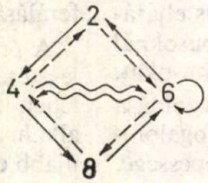
A nyolc hatványainak végződései:



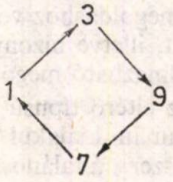
Megfigyelhetjük, hogy a két ábra ugyanolyan, csak a nyilak mutatnak ellenkező irányba. Rajzoljuk le most együtt a két ábrát,



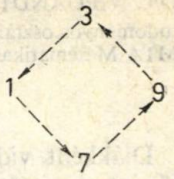
és egészítsük ki a 4-re végződő számok hatványait jelképező hullámos nyíllal, majd a 6-ra végződő számok hatványait ábrázoló hurok-nyíllal.

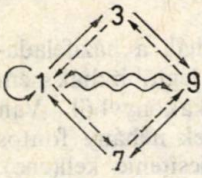


Ezután jön a meglepetés. Pontosan ugyanilyen szerkezetű ábrát kapunk, ha a 3-ra végződő számok hatványait ábrázoljuk:



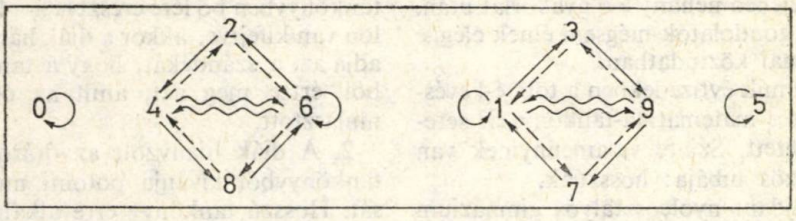
Ugyanezen az ábrán a visszafelé mutató nyíl a 7 hatványait jelenti:





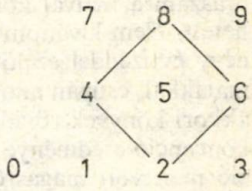
Itt is elkészíthetjük a közös ábrát, és berajzolhatjuk a 9-re végződő számok hatványait jelentő hullámos nyilat, majd az 1-hez a hurok-nyilat.

Végül a két diagrammot együtt lerajzolva, és a magukban álló 0-val és 5-tel kiegészítve jutunk ehhez — a színessel rajzolva különösen — tetszetős ábrához:

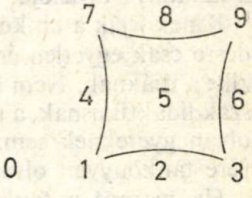


Sok további érdekesség olvasható le az ábráról. Ilyenek: A 2-nek és 8-nak, valamint a 3-nak és 7-nek (egymást 10-re kiegészítő számok) a hatványai viselkednek egymáshoz hasonlóan. Rokonságot mutat a 6, 4 az 1, 9 párossal (szintén egymást 10-re egészítik ki a páros tagjai). Valamint felhívhatjuk a figyelmet az 5 és a 0 hasonló helyzetére. (Mindketten saját magukat egészítik ki 10-re végződő számra).

Ráadásul megfigyelhetjük még a következő érdekességet, amelyet Némethy Katalin szakfelügyelő vett észre. Mintha a kalkulátorokon a számok elrendezése éppen ilyen szempontok alapján történt volna. A páros számok hatványainak végződései így



a páratlanokéi pedig így



helyezkednek el. A 0 és az 5 itt is kitüntetett helyet foglal el.

Az említett tulajdonságok — és nyilván még egy sereg más is — haszonnal vizsgálhatók általános iskolában, de a középiskolák első osztályaiban is. Különösen nagy szerepet kaphatnak hetedik osztályban, amikor a hatványozással részletesen foglalkozunk. Az itt leírt — és ehhez hasonló — vizsgálatok kellemesen színesíthetik a témával kapcsolatos törzsanyagot.

DR. WIEGANDT RICHÁRD
tudományos osztályvezető
MTA Matematikai Kutató Intézet, Budapest

A matematika tankönyvek terjedelméről

Diákként, vidéki tanárként, majd szülőként, úgyis mondhatnám alulnézetben szereztem némi tapasztalatot a matematika tanításáról. Tapasztalataim alapján végiggondolnék néhány kérdést a matematika-tankönyvek terjedelméről. Eközben persze nem fogok rájönni semmi olyan újdonságra, ami ne fordult volna meg minden középiskolai matematikatanár fejében néhány évi gyakorlat után. Ezek a gondolatok mégsem élnek eléggé a szakmai köztudatban.

Az elmúlt évtizedekben a többé-kevésbé sikeres matematika-tankönyvek serege született. Szinte valamennyinek van egy közös hibája: hosszúak.

A hajdani nyolcosztályos gimnázium diákjaként a Borosay—Holenda és a Jónás Márton-féle tankönyveket ismerhettem meg. Ezek a tankönyvek rövidek voltak. Terjedelmük példatárral együtt 130—170 oldal között mozgott. Igaz, hogy akkor a tananyag más volt, bár az óraszám a maival körülbelül azonos lehetett. Nem kívánom összehasonlítani a négy évtizeddel ezelőtti tankönyveket a maiakkal, csupán annyit állítok, hogy az akkori könyvek rövidsége egy átgondolt koncepció eredménye volt. Ez a koncepció nem volt magasröptű, inkább földhözragadt: abból indult ki, hogy ki lesz a tankönyv olvasója.

Kinek írják a tankönyvet? Erre a kérdésre csak egyetlen értelmes válasz létezik: a diáknak. Nem írják a tanárnak, a szakdidaktikusnak, a tanárjelöltnek és az olyan gyereknek sem, aki idősebb testvére tankönyveit olvasgatja.

Ha viszont a tankönyvet diákoknak írják, akkor a következő logikus kérdés az, hogy mikor, miért és miként olvas matematika-tankönyvet egy diák. A válasz meglepően egyszerű: nagyon ritkán. Mégis, a diákok rendszeresen kezükbe veszik a matematikakönyvet, mégpedig akkor, amikor megoldják a házifeladatot. Ezen kívül mást a legtöbb diák nem olvas el a matematikakönyvből. Van azonban a tankönyvnek néhány fontos funkciója, amelyet teljesítenie kell(ene).

1. A diák valamit nem értett meg, vagy nem jól írt le a munkafüzetébe. Ha az a tananyag, amelyről a tanár az órán legfeljebb 15—20 percig magyarázott, a tankönyvben bő lére eresztve 8—10 oldalon van kifejtve, akkor a diák hamar feladja azt a szándékát, hogy a tankönyvből értse meg azt, amit az órán elmulasztott.

2. A diák hiányzott az óráról és a tankönyvből kívánja pótolni mulasztását. Hosszú tankönyv erre alkalmatlan. Egy elmulasztott magyarázat helyett a diák hajlandó, mondjuk, fél órát olvasni, tanulni a könyvből. Egy középiskolás diák már megérti azt, amit közönséges szövegben olvas, ideértve még a természettudományi tárgyak leíró szövegét is. Absztrakt fogalmak közötti összefüggések és számítások olvasása azonban minőségileg nehezebb feladat, ezzel egy átlagos diák nehezen birkózik, részint mert nincs hozzászokva, részint mert szellemi szintjének felső határát súrolja. Egy diák olvasósebessége matematikai szövegből aligha több 2—3 oldalnál óránként. Ilyen olvasási technikával nem fog, mert nem is tud, 8—10 oldalt elolvasni a könyvből. Egyébként alapvetően téves az az elképzelés, hogy könnyebbé válik egy matematikai szöveg olvasása, megértése azáltal, hogy az részletes és azért hosszú.

3. Magántanuló diák vizsgára készül a tankönyvből. Ez az elenyészően kis számú csoport az előbb vázoltak alapján képtelen hosszú tankönyvből tanulni külső segítség nélkül.

4. Ismétléskor a tankönyv legyen biztos támasza a diáknak. Egy hosszú tan-

könyv még a legkülönfélébb tipográfiai mesterkedések mellett sem teljesíti ezt a funkciót, mert a diák elvész benne.

Nem feladata viszont a tankönyvnek a kevés számú kis zseni szakmai fejlődésének az elősegítése. Ők úgysem olvassák a matematika-tankönyveket.

Az eddigiek alapján, úgy vélem, hosszú matematika-tankönyv írása és kiadása megengedhetetlen pocsékolása a papírnak és a nyomdai kapacitásnak.

A hosszú tankönyvek ellen szól a matematikának és a matematikatanításnak egy túl nem becsülhető aspektusa: az egyszerűségre, a sallangmentességre való törekvés. Ha valamit meg lehet fogalmazni világosan, szabatosan és érthetően egy oldalon, akkor azt nem szabad 3—4 oldalra nyújtani, mert azáltal csak körülményessé, zavarossá, áttekinthetetlenné válik a mondanivaló. Fogalmazáskor persze a fordított problémával állunk szemben: megírunk valamit 3—4 oldalon elfogadhatóan, sőt esetleg jól is. Ezután kötelességünk lenne venni azt az igen nagy fáradságot, hogy akár többszöri átírás árán is, a felesleget könyörtelenül kigyomlálva, megközelítsük a gondolat megfogalmazhatóságának optimumát egyetlen oldalon. Ez nagyon hálátlan feladat, amennyiben a szerző csökkenti jogdíját és esetleg deheroizálja fennköltnek tűnő szövegét. Mégis ezt követeli mindenfajta (nemcsak matematikai) gondolatközlés íratlan etikája.

A matematikatanítás nem elhanyagolható feladata a diákokat szabatos, pontos beszédre nevelni. A jó matematikatanár magyarázata szinte szófukar, és ő is rövid, tömör válaszokat, indoklásokat kíván a diákjaitól, mert tudja, hogy a szóözön logikai réseket, zavaros gondolatokat, tudatlanságot takar. A hosszú tankönyv — bár elismerem, hogy pontosan és szabatosan van fogalmazva — így vagy úgy, de bőbeszédűségre nevel.

Meggyőződésem szerint a szaktanár sem tanít szívesen terjengős tankönyv alapján. A terjengősség oka lehet didaktikai, nevezetesen az induktív tárgyalásmódnak és a heurisztikának a túlhajtása, ami semmivel sem jobb, mint a deduktív tárgyalásmód és a formalizmus abszolutizálása. Lehet ugyan törekedni arra, hogy a tanulók maguk jöjjenek rá a matematikai összefüggésekre, és mondják ki, bizonyítsák be az általános érvényű állításokat, de a gyakorlatban ez nem mindig követhető módszer az idő rövidsége, a folyamatos számonkérés, az osztály szellemi szintje, sőt olykor a tanár felkészültsége (netán felkészületlensége) miatt sem.

Most már csak arra keresnék választ, miért hosszúak a matematika-tankönyv-

---

СОДЕРЖАНИЕ

Балог Виктория: Мы склонны 161
д-р Киш Шандор: Обучение посредственному доказанию 163
Ластоци Дьюла: Построение точек графика геометрическими способами 169
д-р Матьяш Ференц—д-р Молнар Шандор: О математическом соревновании студентов пединститутов 1986 г. 175
Микша Лайош: Приобретение и использование знаний в системах математических задач для 5 класса 179
д-р Надьне д-р Силваши Марта: О программах в помощь преподавания пространственной геометрии 182
д-р Шарницки Виктор: Передвижная конференция математиков в г. Ниредьхазе 183
д-р Шарницки Виктор: Совещание преподавателей технических вузов 184
Сабо Тихамер: Некоторые проблемы преподавания математики в средней школе 185
Строкаине Фёлдвари Вера: Любопытные случаи окончаний степеней 190
д-р Вигандт Рихард: Об объёме учебников математики 192
НОВЫЕ КНИГИ ..... IV.

vek. Sokan állítják, azért, mert a kiadó terjedelem után fizet. Nem hiszem, hogy a válasz ilyen egyszerű, mert nem hiszem, hogy a kiadó olyan jól fizetne. Inkább arról van szó, hogy a szerző egyéb, valójában másodlagos szempontok hatása alá kerül. A könyvet ugyan diákoknak írja, de a könyv elbírálása már nem a diákok dolga. Ezért a tankönyvíró óhatatlanul is figyelembe vesz egy vélt szakmai elvárást: még azt hinnék, hogy összecsapott egy szakmailag kisigényű munkát, ha csupán 150 oldalas könyvet produkálna. Leginkább talán egy téves munkahipotézis következménye a hosszú tankönyv: a tankönyvíró ideális állapotokat (elsősorban elegendő időt) feltételezve, mintegy bemutatni kívánja azt, hogy ő hogyan tanítaná a tantervi anyagot. Ez a hipotézis viszont csupán egy didaktikai segédkönyv koncepciója lehet.

Végezetül lenne egy szerény javaslatom, amely ugyan nem oldaná meg a matematika-tanítás problémáit, de csökkentené a papírpocsékolást. Írjanak ki pályázatot maximált oldalszámú (a jelenlegieknek körülbelül fele terjedelmű) matematika-tankönyvekre, és kiadás esetén fizessenek tankönyvenként olyan fix összegű honoráriumot, amely több lenne, mint amennyit jelenleg a legterjedelmesebb könyvért fizetnek. A pályázattal járó kiadások és a szerzői tiszteletdíj többletköltsége bőven fedezhető lenne a megtakarított papír árából és a megtakarított nyomdaköltségből. A rengeteg sok kísérlet után és mellett talán ezt is érdemes lenne kipróbálni.

ÚJ KÖNYVEK

ÁBRAHÁM ISTVÁN—BEDŐ LÁSZLÓ—CZÉTÉNYI CSABA—IFJ. FRIGYESI MIKLÓS—JUHÁSZ ATTILA—KORÁNYI ERZSÉBET: *Matematika a felvételi vizsgára készülők részére* (2. kiadás). Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 584 oldal, 51 Ft.

ANDRÁSFAI BÉLA: *Versenymatek gyerekeknek* (Általános és középiskolai tanulók számára), Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 168 oldal, 27 Ft.

BOJTÁR IMRE—VÖRÖS GÁBOR: *A végeselem módszer alkalmazása lemez- és héjszerkezetekre.* Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 163. oldal, 48 Ft.

BÖHM JÁNOS (szerk.): *Egyetemek és főiskolák 1985. évi felvételi írásbeli tételei.* Budapest, 1986. Tankönyvkiadó, 206 oldal, 35 Ft.

CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER (szerk.): *Kézikönyv a matematika 3. osztályos anyagának tanításához* (4. kiadás). Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 392 oldal, 51 Ft.

FÜSTÖS LÁSZLÓ—MESZÉNA GYÖRGY—SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA: *A sokváltozós adatelemzés statisztikai módszerei.* Budapest, 1986. Akadémiai Kiadó, 525 oldal, 115 Ft.

GALILEI, GALILEO: *Matematikai érvelések és bizonyítások két új tudományág, a mechanika és a mozgások köréből.* Budapest, 1986, Európa Könyvkiadó, 399 oldal, 82 Ft.

GÁSPÁR LÁSZLÓ: *Mátrixaritmetikai gyakorlatok* (3. kiadás), Egyetemi segédkönyv. Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 442 oldal, 57 Ft.

LEINDLER LÁSZLÓ: *Strong Approximation by Fourier Series.* Budapest, 1985, Akadémiai Kiadó, 209 oldal, 270 Ft.

LEONTE, A.—TRANDAFIR, R.: *A valószínűségszámítás klasszikus és aktuális problémái.* Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 275 oldal, 77 Ft.

Proceedings of the 4th Pannonian Symposium on Mathematical Statistics Vol. A, B, Budapest, 1985, Akadémiai Kiadó, 314+339 oldal, 875 Ft.

ROHOVSZKY RUDOLF: *Matematika* (11. kiadás). Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 159 oldal, 24 Ft.

SCHARLE PÉTER—SZILÁGYI GYÖRGY: *A végeselem módszer vegyes analitikus eljárásai.* Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 113 oldal, 38 Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR: *Mátrixszámítás, Példatár* (4. kiadás). Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 339 oldal, 54 Ft.

SCHUBERT, HORST: *Topológia.* Budapest, 1986, Műszaki Könyvkiadó, 356 oldal, 75 Ft.

ÚJVÁRI ISTVÁN: *Felkészülés és felzárkózás matematikából az általános és középiskolai tanulók számára* (3. kiadás). Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 158 oldal, 23 Ft.

Évfordulóink a műszaki és természettudományokban 1986. Budapest, 1985, MTESZ, 108 oldal, 50 Ft.

Dr. Scharnitzky Viktor

Ára: 7,— Ft